

C. KESSLER

Solution de la question 497

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 275-278

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__275_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 497

(voir t. XVIII, p. 444),

PAR M. C. KESSLER,
Eleve du lycée Saint-Louis.

Tout plan doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan coupe cette surface suivant deux coniques qui, projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, ont un foyer commun au pied de cet axe. (MOUTARD.)

Je considère la conique dans une de ses positions, par un point de l'axe je mène deux tangentes à cette conique, également inclinées sur cet axe, ce qui est toujours possible, je rapporte alors la conique à ces deux tangentes prises pour axes des x et des z , ses équations seront

$$(1) \quad xz + \lambda(ax + bz - 1)^2 = 0, \quad y = 0,$$

l'axe des y est pris perpendiculairement aux deux autres.

Je cherche l'équation de la surface engendrée.

Soient

$$z - x = k, \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2zx \cos \theta = \rho^2, \quad (4)$$

θ étant l'angle des deux tangentes, les équations d'un parallèle. J'élimine x, y, z entre les quatre équations précédentes; l'équation (4) peut s'écrire

$$x^2 + z^2 - 2zx + 4zx \cos^2 \frac{\theta}{2} = \rho^2$$

ou

$$zx = \frac{\rho^2 - k^2}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

et, par suite,

$$(z + x)^2 = (z - x)^2 + 4zx = k^2 + \frac{\rho^2 - k^2}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\rho^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2}},$$

d'où l'on déduit alors

$$z = \frac{k}{2} + \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2 \cos \frac{\theta}{2}}, \quad x = \frac{k}{2} - \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2 \cos \frac{\theta}{2}},$$

et, par suite, substituant dans l'équation (1),

$$\frac{\rho^2 - k^2}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} + \lambda \left[\frac{a}{2} \left(k - \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) + \frac{b}{2} \left(k + \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) - 1 \right]^2 = 0,$$

Pour avoir l'équation de la surface, ou plutôt celle de la section par le plan doublement tangent $\gamma O x$ qui est ici quelconque puisque la conique a été prise dans une quelconque de ses positions, et qui est bien doublement tangent, il suffit de remplacer k par $-x$ et ρ^2 par $x^2 + y^2$, et il vient

$$\frac{y^2}{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} - \lambda' \left[\frac{a}{2} \left(-x - \frac{\sqrt{x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) + \frac{b}{2} \left(-x + \frac{\sqrt{y^2 + x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) - 1 \right]^2 = 0.$$

λ ne peut être positif, car on aurait la somme de deux carrés qui ne pourrait être nulle que pour certaines valeurs particulières de x, y, z ; c'est pour cette raison que j'ai posé

$$\lambda = -\lambda';$$

on voit alors que cette équation se décompose en deux

autres du second degré

$$\frac{y}{2 \cos \frac{\theta}{3}} + \sqrt{\lambda'} \left[+ \frac{a}{2} \left(x + \frac{\sqrt{x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{b}{2} \left(x - \frac{\sqrt{y^2 + x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) + 1 \right] = 0,$$

$$\frac{y}{2 \cos \frac{\theta}{3}} - \sqrt{\lambda'} \left[+ \frac{a}{2} \left(x + \frac{\sqrt{x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + y^2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) \right. \\ \left. + \frac{b}{2} \left(x - \frac{\sqrt{y^2 + x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right) + 1 \right] = 0$$

Projetées sur un plan perpendiculaire à l'axe, elles ont un foyer commun au pied de l'axe, car si l'on remplace $x \cos \frac{\theta}{2}$ par x , on a la nouvelle projection; ce qui montre que $\sqrt{x^2 + y^2}$ est fonction linéaire de x et de y pour chaque conique. Le cas du tore s'en déduirait facilement