

KESSLER

L. VERHARNE

Solution de la question 479

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 264-266

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__264_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 479

(voir t. XVIII, p. 172);

PAR M. KESSLER,

Élève du lycée Saint-Louis ;

ET M. L. VERHARNE,

Elève du lycée de Douai (classe de M. David).

$$\begin{aligned}
 a^n + b^n &= (a + b)^n - nab(a + b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a + b)^{n-4} \\
 &\quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 (a + b)^{n-6} \\
 &\quad + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 b^4 (a + b)^{n-8} \\
 &\quad - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 b^5 (a + b)^{n-10},
 \end{aligned}$$

n entier positif; on arrête la série lorsque l'exposant de $(a + b)$ devient négatif.

Il faut alterner les signes.

On vérifie aisément que cette égalité a lieu pour $n = 1, 2, 3, \dots$. Je dis qu'elle a lieu dans tous les cas, et pour cela je ferai voir que si elle a lieu pour l'exposant n , elle subsiste aussi pour l'exposant $(n + 1)$. Soit donc

$$\begin{aligned}
 a^n + b^n &= (a + b)^n - nab(a + b)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a + b)^{n-4} \\
 &\quad - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 (a + b)^{n-6} + \dots
 \end{aligned}$$

Je remarque qu'on a identiquement

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a^n + b^n)(a + b) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

Or

$$\begin{aligned}
 (1) \left\{ \begin{aligned} (a^n + b^n)(a + b) &= (a + b)^{n+1} - nab(a + b)^{n-1} \\ &+ \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a + b)^{n-3} \\ &- \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 (a + b)^{n-5} + \dots, \\ a^{n-1} + b^{n-1} &= (a + b)^{n-1} - (n-1)ab(a + b)^{n-3} \\ &+ \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a + b)^{n-5} \\ &- \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 (a + b)^{n-7} + \dots, \end{aligned} \right. \\
 (3) \left\{ \begin{aligned} ab(a^{n-1} + b^{n-1}) &= ab(a + b)^{n-1} - (n-1)a^2 b^2 (a + b)^{n-3} \\ &+ \frac{(n-1)(n-4)}{1 \cdot 2} a^3 b^3 (a + b)^{n-5} \\ &- \frac{(n-1)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4 b^4 (a + b)^{n-7} + \dots \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Retranchant convenablement (3) de (1), il vient

$$\begin{aligned}
 a^{n+1} + b^{n+1} &= (a + b)^{n+1} - (n+1)ab(a + b)^{n-1} \\ &+ \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} a^2 b^2 (a + b)^{n-3} - \dots
 \end{aligned}$$

La loi est donc générale.

C. Q. F. D.

Du reste cette proposition résulte immédiatement des formules d'Albert Girard, car a et b sont les racines de l'équation

$$z^2 - (a + b)z + ab = 0,$$

par suite $a^n + b^n$ est la somme des $n^{\text{ième}}$ puissances de ces racines, et Waring a donné une formule qui donne immédiatement cette somme; il ne reste qu'à y supposer le degré de l'équation égal à 2. Je crois d'ailleurs que Waring a fait lui-même ce calcul.

Note du Rédacteur. C'est le terme général d'une série récurrente dont l'échelle a deux termes.