

J. DE VIRIEU

Solution de la question 557

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 135-138

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__135_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 557

(voir t. XIX, p. 464);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Répétiteur à Lyon (institution Poncin).

Énoncé :

$$\frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + \frac{x}{x^2+3^2} + \dots + \frac{1}{2} \pi \quad \text{pour} \quad \lim x = 0.$$

1. Il nous semble que, dans l'hypothèse dont il s'agit, la limite de la série proposée est zéro (*).

Posons

$$\varphi(x, n) = \frac{x}{x^2+1^2} + \frac{x}{x^2+2^2} + \dots + \frac{x}{x^2+n^2},$$

$$f(x, n) = \frac{1}{x^2+1^2} + \frac{1}{x^2+2^2} + \dots + \frac{1}{x^2+n^2},$$

d'où

$$\varphi(x, n) = x f(x, n).$$

(*) J'ai copié cette équation, sans examen, dans je ne sais quel journal allemand. Tm.

Pour des valeurs quelconques finies de x et de n , on a

$$f(x, n) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2};$$

cette dernière somme, quand le nombre de ses termes augmente, tend constamment vers une limite finie, savoir $\frac{1}{6} \pi^2$ (Euler, *Introductio in analysin*, vol. I, p. 131) :

$$f(x, n) < \frac{6}{\pi^2}, \quad \varphi(x, n) < \frac{1}{6} \pi^2 x, \quad \text{pour } x > 0,$$

r représentant un nombre absolu aussi petit qu'on voudra, mais non nul, alors pour

$$0 < x < \frac{6}{\pi^2} r,$$

on aura

$$\varphi(x, n) < r,$$

quel que soit n .

2. On peut donc trouver un nombre absolu, non nul, tel, que, pour toute valeur positive de x inférieure à ce nombre, la somme d'un nombre quelconque de termes de la série proposée soit inférieure à un nombre absolu donné, quelque petit que soit ce dernier; la limite est donc zéro.

3. On peut arriver au même résultat sans avoir recours à la limite d'une autre série.

x étant positif et non nul, chaque terme de la série proposée est plus petit que le précédent; donc, n étant un entier fixe,

$$\frac{x}{x^2 + 1^2} + \frac{x}{x^2 + 2^2} + \frac{x}{x^2 + 3^2} + \dots + \frac{x}{x^2 + n^2} < \frac{nx}{x^2 + 1},$$

r étant un nombre absolu, non nul, inférieur à $\frac{1}{2}$ et aussi petit qu'on voudra, l'inégalité

$$\frac{nx}{x^2+1} < r$$

est remplacée par les suivantes :

$$rx^2 - nx + r > 0,$$

$$\left(rx - \frac{n}{2} \right)^2 - \frac{n^2 - 4r^2}{4} > 0,$$

$$\left(rx - \frac{n - \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2} \right) \left(rx - \frac{n + \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2} \right) > 0,$$

$$x < \frac{n - \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2r}, \quad x > \frac{n + \sqrt{n^2 - 4r^2}}{2r},$$

donc

$$0 < x < \frac{2r}{n + \sqrt{n^2 - 4r^2}} \frac{x}{x^2 + 1^2} + \dots + \frac{x}{x^2 + n^2} < \frac{nx}{x^2 + 1} < r.$$

4. Quel que soit le nombre de termes consécutifs de la série proposée que l'on veut ajouter, il existe un nombre tel, que, pour toute valeur positive de x inférieure à ce nombre, la somme dont il s'agit soit plus petite qu'un nombre absolu donné, non nul, quelque petit que soit ce dernier ; la limite ne peut donc être que zéro.

Note. MM. Pirain et Kessler, élèves du lycée Saint-Louis, emploient cette considération.

Soit la courbe donnée par l'équation

$$y = \frac{a}{a^2 + x^2},$$

l'aire de cette courbe est

$$\int y dy = \arctan \frac{x}{a} + \text{constante.}$$

Si l'on suppose qu'à l'origine où $x = 0$ l'aire est nulle, alors la constante est aussi nulle; mais on ne peut plus supposer ensuite $a = 0$, $\text{arc tang } \frac{0}{0}$ est une expression indéterminée.