

MICHAEL ROBERTS

Note sur les équations du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 87-89

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__87_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. MICHAEL ROBERTS.

J'ai lu avec beaucoup d'intérêt les remarques que M. Lebesgue vient de publier dans les *Nouvelles Annales* (t. XVII, p. 384-391) sur la résolution des équations biquadratiques, et aussi la Note de M. Aronhold qui se rapporte au même sujet. Dans ce qui suit, je me propose de faire voir comment la solution de ce dernier peut être ramenée à celle d'Euler. Pour cela je donne l'énoncé du théorème suivant sur les déterminants, qu'on peut démontrer facilement. Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & x_n & x_1 \\ x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_{n-2} & x_{n-1} \end{vmatrix}$$

On sait que Δ a pour facteurs les valeurs que prend la fonction

$$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \dots + \omega^{n-1} x_n,$$

en substituant pour ω successivement les racines de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0. (*)$$

(*) Si les $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont disposés symétriquement, alors il faut que n soit un nombre impair.

Considérons maintenant l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et posons

$$a^2\varpi = b^2 - ac,$$

$$12a^2\mu = ae - 4bd + 3c^2,$$

$$8a^3\lambda = ace + 2bed - ad^2 - eb^2 - c^3,$$

$$l = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

$$m = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^3},$$

et si Δ représente le déterminant de M. Aronhold, on a
(en écrivant dans son équation θ au lieu de λ)

$$\begin{vmatrix} \frac{\theta}{a} - l^{\frac{1}{3}} - m^{\frac{1}{3}} \\ -l^{\frac{1}{3}} - m^{\frac{1}{3}} & \frac{\theta}{a} \\ -m^{\frac{1}{3}} + \frac{\theta}{a} & -l^{\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta}{a^3},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{d\Delta}{dc} = -a\varpi + \theta.$$

Mais si $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les racines de l'équation

$$\Delta = 0,$$

nous tirons, en vertu du théorème que je viens d'énoncer,

$$\frac{\theta_1}{a} = l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\theta_2}{a} = \omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{\theta_3}{a} = \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}}$$

(ω est une racine cubique imaginaire de l'unité), en

sorte que

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{d\Delta}{dl} \right)_1 = -\varpi + l^{\frac{1}{3}} + m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{d\Delta}{dl} \right)_2 = -\varpi + \omega l^{\frac{1}{3}} + \omega^2 m^{\frac{1}{3}},$$

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{d\Delta}{dl} \right)_3 = -\varpi + \omega^2 l^{\frac{1}{3}} + \omega m^{\frac{1}{3}}.$$

Or les seconds membres de ces dernières équations sont précisément les racines de la réduite du troisième degré dans la méthode d'Euler.