

LEBESGUE

Sur la valeur de la somme

$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} + \cdots + \frac{1}{\ell^m}, a, b, \dots, \ell$
**étant les termes d'une progression
arithmétique croissante**

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 82-84

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__82_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

 SUR LA VALEUR DE LA SOMME

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} + \dots + \frac{1}{l^m},$$

$a, b, \dots, l$ étant les termes d'une progression arithmétique croissante ;

PAR M. LEBESGUE.

Maintenant que les dérivées sont introduites dans les cours de mathématiques, et que par suite les aires paraboliques et hyperboliques se déterminent en passant d'une dérivée à la fonction primitive, peut-être conviendrait-il, à l'article des séries, de déduire la règle de convergence et de divergence de la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots \text{ à l'infini}$$

de la considération de l'aire d'un segment compris entre la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^m}$, l'axe des x et deux ordonnées.

Tout en obtenant la règle de convergence et de divergence, qui reste la même quand 1, 2, 3, ..., sont remplacés par $a, a + \partial, a + 2\partial, \dots$, l'on aurait la valeur approchée d'un nombre limité de termes consécutifs.

Pour $y = \frac{1}{x}$ (coordonnées rectangulaires), l'aire est

$$\log \frac{l}{a},$$

pour $y = \frac{1}{x^m}$ l'aire est

$$\frac{1}{m-1} \left[\frac{1}{a^{m-1}} - \frac{1}{l^{m-1}} \right].$$

Si maintenant on fait $l = a + (n-1)\partial$, et que l'on nomme $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n$ les coordonnées équidistantes qui répondent aux abscisses $x_1 = a, x_2 = a + \partial, x_3 = a + 2\partial, \dots$,

$x_n = a + (n - 1)\delta$, l'aire du polygone formé en joignant les points de la courbe qui correspondent aux abscisses $x_1, x_2, \dots, x_n$ sera

$$\delta[y_1 + y_2 + \dots + y_n] - \frac{1}{2}\delta(y_1 + y_n).$$

Cette aire se compose, 1° de l'aire hyperbolique déterminée plus haut; 2° d'une somme de segments formés par les cordes qui unissent les sommets consécutivement deux à deux, somme toujours bien plus petite que $\frac{1}{2}(y_1 - y_n)$, ce qui se voit immédiatement sur la figure. On aura, en représentant par S cette somme de segments, 1° pour $m = 1$

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \dots + y_n &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{l} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{l} \right) + \frac{1}{\delta} S + \frac{1}{\delta} \log \frac{l}{a}; \end{aligned}$$

2° quel que soit m

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \dots + \frac{1}{l^m} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{l^m} \right) \\ &+ \frac{1}{\delta} S + \frac{1}{(m-1)\delta} \left[\frac{1}{a^{m-1}} - \frac{1}{l^{m-1}} \right]. \end{aligned}$$

Pour $m = 1$, l et $\log l$ devenant infinis, la série $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \dots$, prolongée indéfiniment, est divergente.

Pour $m < 1$, le terme $-\frac{1}{(m-1)\delta} \cdot \frac{1}{l^{m-1}}$ devient $\frac{l^{1-m}}{\delta(1-m)}$, c'est-à-dire infini aussi bien que l , il y a encore divergence.

Pour $m > 1$, $\frac{1}{l^{m-1}}$ tend vers zéro, et il y a convergence quand l tend vers l'infini.

Cette démonstration, qui est bien connue, pourrait être introduite dans les *Éléments*. Si je la donne ici, c'est pour avoir occasion de faire remarquer qu'il y a un vice de rédaction à la page 465 des *Nouvelles Annales*, 1858.

La formule à employer est celle d'Euler :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = C + \log n + \frac{1}{2n} - \frac{A}{4n^2} + \frac{B}{6n^3} - \dots,$$

où $C = 0,577, \dots$; $A, B, C, \dots$ étant les nombres de Bernoulli.

La formule exposée plus haut donne

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = 0,5 + \log n + \frac{1}{2n} + S.$$

En négligeant S , la valeur $0,5 + \log n + \frac{1}{2n}$ diffère peu de celle d'Euler.

Comme on a aussi

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a} = 0,5 + \log a + \frac{1}{2a} + S_1,$$

d'où

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a-1} = 0,5 + \log a - \frac{1}{2a} + S_1;$$

il en résulte

$$\frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{1}{2a} - \log a + \log n + \frac{1}{2n} + S - S_1$$

et

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{a-1} + \frac{1}{2a} - \log a + \log n + \frac{1}{2n} + (S - S_1).$$

Pour $a = 20$ on aurait, en négligeant $S - S_1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = 0,577 \dots + \log n + \frac{1}{2n},$$

qui diffère à peine de celle d'Euler. Mais cette dernière a l'avantage d'être un cas particulier d'une importante formule générale, qui introduit dans le calcul des séries les nombres de Bernoulli (*Calcul différentiel*, chap. V).