

J. DEL BECCARO

**Solution de la question 351**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 18  
(1859), p. 73-76

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1859\\_1\\_18\\_\\_73\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__73_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**SOLUTION DE LA QUESTION 354**

( voir t. XV, p. 459 );

PAR M. LE D<sup>r</sup> J. DEL BECCARO,  
Ancien élève de l'Ecole Normale de Pise.

---

Soient les équations

$$\begin{aligned} x^3 - px^2 + qx - r &= 0 \quad (\text{racines } \alpha, \alpha', \alpha''), \\ x^3 - p'x^2 + q'x - r' &= 0 \quad (\text{racines } \beta, \beta', \beta''), \end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} & D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} & D_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta'' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix} \\ D_4 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta'' \end{vmatrix} & D_5 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta \\ 1 & \alpha'' & \beta' \end{vmatrix} & D_6 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta'' \\ 1 & \alpha' & \beta' \\ 1 & \alpha'' & \beta \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta = 27r^2 + 4q^3 - 18pqr + 4p^3r - p^2q^2,$$

$$\Delta' = 27r'^2 + 4q'^3 - 18p'q'r' + 4p'^3r' - p'^2q'^2.$$

Démontrer que l'équation suivante en  $t$ 

$$\begin{aligned} &t[t + (p^2 - 3q)(p'^2 - 3q'^2)]^2 \\ &- \frac{1}{16} \left[ \sqrt{\Delta} \left( \frac{d\Delta'}{dr'} \right) \pm \sqrt{\Delta'} \left( \frac{d\Delta}{dr} \right) \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

a pour racines les quantités  $-D_1^2, -D_2^2, -D_3^2, -D_4^2,$   
 $-D_5^2, -D_6^2.$  (MICHAEL ROBERTS.)

Du développement de la quantité  $D_1^2,$ 

$$D_1^2 = (p^2 p_1^2 - 4M) + 2pp'z_1 - 3z_1^2$$

où

$$M = p^2 q' + p'^2 q - 3qq',$$

et  $z_1$  exprime la fonction

$$z_1 = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'',$$

on déduit ceux de  $D_2^2, D_3^2, D_4^2, D_5^2, D_6^2$  en y échangeant  $z_1$  en  $z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ , qui sont les valeurs différentes que peut prendre la fonction  $z$ . Laisant les  $\alpha$  et changeant  $\beta'$  en  $\beta''$  et *vice versa* pour  $z_2$ , etc.

Puisque  $z_1, z_2, z_3$  peuvent être regardées comme racines de l'équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}) = 0,$$

et  $z_4, z_5, z_6$  de l'autre équation

$$z^3 - pp'z^2 + Mz - \frac{1}{2}(N + \sqrt{\Delta\Delta'}) = 0$$

(voir *Nouvelles Annales*, M. Roberts, t. XV, p. 77), on peut calculer, par la théorie des fonctions symétriques, les coefficients des deux équations suivantes

$$t^3 + t^2 \Sigma D_1^2 + t \Sigma D_1^2 D_2^2 + D_1^2 D_2^2 D_3^2 = 0,$$

$$t^3 + t^2 \Sigma D_4^2 + t \Sigma D_4^2 D_5^2 + D_4^2 D_5^2 D_6^2 = 0,$$

qui ont pour racines  $-D_1^2, -D_2^2, -D_3^2$  et  $-D_4^2, -D_5^2, -D_6^2$ .

$$\Sigma z_1 = pp',$$

$$\Sigma z_1^2 = p^2 p'^2 - 2M,$$

$$\Sigma z_1 z_2 = M,$$

$$\Sigma z_1 z_2^2 = pp' M - \frac{3}{2}(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$\Sigma z_1^2 z_2^2 = M^2 - pp'(N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

( 75 )

$$z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{2} (N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$\Sigma z_1 z_2 z_3^2 = \frac{1}{2} pp' (N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$\Sigma z_1^2 z_2^2 z_3 = \frac{1}{2} M (N - \sqrt{\Delta\Delta'}),$$

$$(z_1 z_2 z_3)^2 = \frac{1}{4} (N - \sqrt{\Delta\Delta'})^2;$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Sigma D_1^2 &= 3(p^2 p'^2 - 4M) + 2pp' \Sigma z_1 - 3\Sigma z_1^2 \\ &= 2(p^2 - 3q)(p'^2 - 3q'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma D_1^2 D_2^2 &= 3(p^2 p'^2 - 4M)^2 + 4(p^2 p'^2 - 4M) pp' \Sigma z_1 \\ &\quad - 6(p^2 p'^2 - 4M) \Sigma z_1^2 + 4p^2 p'^2 \Sigma z_1 z_2 \\ &\quad - 6pp' \Sigma z_1^2 z_2 + 9\Sigma z_1^2 z_2^2 = (p^2 - 3q)^2 (p' - 3q')^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &D_1^2 D_2^2 D_3^2 \\ &= M^2 (p^2 p'^2 - 4M) + pp' N (9M - 2p^2 p'^2) \\ &\quad - \frac{27}{4} (N^2 + \Delta\Delta') + \sqrt{\Delta\Delta'} \left( \frac{27}{2} N - 9pp' M + 2p^3 p'^3 \right) \\ &= -\Delta'' - \frac{27}{4} \Delta\Delta' + \sqrt{\Delta\Delta'} \cdot \frac{1}{2} (27N - 18pp' M + 4p^3 p'^3), \end{aligned}$$

désignant par  $\Delta''$  le discriminant de l'équation

$$z^3 - pp' z^2 + Mz - \frac{1}{2} N = 0.$$

Mais au moyen des expressions

$$\frac{d\Delta}{dr} \cdot \frac{d\Delta'}{dr'} = 4(27N - 18pp' M + 4p^3 p'^3),$$

on a

$$\Delta'' = \frac{1}{16} \left[ \Delta \left( \frac{d\Delta'}{dr'} \right)^2 + \Delta' \left( \frac{d\Delta}{dr} \right)^2 - 108 \Delta\Delta' \right]$$

(voir *Nouvelles Annales*, t. XV, p. 78) la fonction  $D_1^2 D_2^2 D_3^2$  devient

$$D_1^2 D_2^2 D_3^2 = -\frac{1}{16} \sqrt{\Delta} \left( \frac{d\Delta'}{dr'} \right) - \sqrt{\Delta'} \left( \frac{d\Delta}{dr} \right) \Big]^2.$$

De même les quantités  $\Sigma D_4^2$ ,  $\Sigma D_4^2 D_5^2$ ,  $D_4^2 D_5^2 D_6^2$  s'expriment de la manière suivante :

$$\Sigma D_4^2 = \Sigma D_1^2,$$

$$\Sigma D_4^2 D_5^2 = \Sigma D_1^2 D_2^2,$$

$$\begin{aligned} D_4^2 D_5^2 D_6^2 &= -\Delta'' - \frac{27}{4} \Delta \Delta' - \sqrt{\Delta \Delta'} \cdot \frac{1}{2} (27 N - 18 p p' M + 4 p^3 p'^3) \\ &= -\frac{1}{16} \left[ \sqrt{\Delta} \left( \frac{d\Delta'}{dr'} \right) + \sqrt{\Delta'} \left( \frac{d\Delta}{dr} \right) \right]^2. \end{aligned}$$

De sorte que les équations en  $t$  deviennent

$$\begin{aligned} &t [t + (p^2 - 2q)(p'^2 - 2q')]^2 \\ &- \frac{1}{16} \left[ \sqrt{\Delta} \left( \frac{d\Delta'}{dr'} \right) \mp \sqrt{\Delta'} \left( \frac{d\Delta}{dr} \right) \right]^2 = 0; \end{aligned}$$

et sont satisfaites par les quantités  $-D_1^2$ ,  $-D_2^2$ ,  $-D_3^2$ ,  $-D_4^2$ ,  $-D_5^2$ ,  $-D_6^2$ , comme il fallait le démontrer.

*Corollaire.* L'équation dont les racines sont les déterminants  $D_1^2$ ,  $D_2^2$ ,  $D_3^2$ ,  $D_4^2$ ,  $D_5^2$ ,  $D_6^2$  est

$$\begin{aligned} &t [t - (p^2 - 2q)(p'^2 - 2q')]^2 \\ &+ \frac{1}{16} \left[ \sqrt{\Delta} \left( \frac{d\Delta'}{dr'} \right) \pm \sqrt{\Delta'} \left( \frac{d\Delta}{dr} \right) \right]^2 = 0. \end{aligned}$$


---