

MICHAUX

Solution de la question 453

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 68-71

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__68_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 455

(voir t. XVII, p. 434).

PAR M. MICHAUX,
Élève du lycée Charlemagne.

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + L(n+1),$$

$L = \log \text{ népérien.}$

(SCHLOMILCH.)

En désignant par x une quantité positive comprise entre 0 et 1, on a la série convergente à termes alternativement positifs et négatifs

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots,$$

d'où l'on déduit pour x les deux limites

$$x > L(1+x), \quad x < L(1+x) + \frac{x^2}{2}.$$

On aura donc généralement, si p est positif et supérieur à 1,

$$(1) \quad L\left(1 + \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{p} < L\left(1 + \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p^2}.$$

Remplaçant p successivement par 1, 2, 3, ..., n dans ces inégalités (1), ajoutant membre à membre les nouvelles inégalités obtenues, et posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} L\left(1 + \frac{1}{1}\right) + L\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + L\left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ = \Sigma.L\left(1 + \frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

on voit que

$$\begin{aligned} \Sigma.L\left(1 + \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < \Sigma.L\left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right\}. \end{aligned}$$

Or

$$L\left(1 + \frac{1}{p}\right) = L\frac{p+1}{p},$$

et la somme des logarithmes de plusieurs quantités est égale aux logarithmes du produit de ces mêmes quantités, on aura donc

$$\begin{aligned} \Sigma.L\left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ = L\left(1 + \frac{1}{1}\right) + L\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + L\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ = L\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \dots \frac{n}{n-1} \frac{n+1}{n} = L(n+1). \end{aligned}$$

Ainsi

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < L(n+1) \\ + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right\}.$$

Cela posé, les termes de la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2},$$

prolongée indéfiniment, peuvent être groupés ainsi

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{1^2} + \left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right] + \left[\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \right] + \dots \\ & + \left[\frac{1}{(2^k)^2} + \dots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} \right], \end{aligned} \right.$$

et comme l'on a généralement

$$\frac{1}{(2^k)^2} + \dots + \frac{1}{(2^{k+1}-1)^2} < 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k},$$

on voit que la somme des termes de la série (2) prolongée indéfiniment est plus petite que la somme des termes de la progression géométrique décroissante indéfinie

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots,$$

et comme cette dernière série a pour somme 2, nous avons enfin

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right\} < 1.$$

Donc on peut écrire

$$L(n+1) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + L(n+1).$$

C. Q. F. D.

Remarque. On voit que la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots,$$

prolongée indéfiniment a pour somme $\frac{\pi^2}{6}$. Donc on pourrait remplacer la limite supérieure $1 + L(n+1)$ par la limite plus faible $L(n+1) + \frac{\pi^2}{6}$ (*).

Note. MM. Cornet, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Briot), et Gérard, élève de l'institution des Carmes (classe de M. Gerono) ont résolu à peu près la question de la même manière.