

Note de M. Lebesgue

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 44-45

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__44_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

NOTE DE M. LEBESGUE.

Trouver un triangle dont les côtés et la surface forment une équidifférence en nombres rationnels x , $x + y$, $x + 2y$, $x + 3y$.

La question admet-elle des solutions en nombres entiers?

L'équation du problème est

$$\begin{aligned}x + 3y &= \sqrt{\frac{3(x+y)}{2} \frac{(x+3y)}{2} \left(\frac{x+y}{2}\right) \left(\frac{x-y}{2}\right)} \\ &= \frac{x+y}{4} \sqrt{3(x+3y)(x-y)},\end{aligned}$$

ou bien

$$4 = (x+y) \sqrt{\frac{3(x-y)}{x+3y}}.$$

Posant $y = xz$,

$$4 = x(1+z) \sqrt{\frac{3(1-z)}{1+3z}}.$$

Soit

$$\frac{3(1-z)}{1+3z} = \frac{p^2}{q^2}$$

(p, q étant premiers entre eux), il vient

$$x = \frac{6q}{p} \left(\frac{p^2 + q^2}{p^2 + 3q^2} \right), \quad y = \frac{2q}{p} \left(\frac{3q^2 - p^2}{p^2 + 3q^2} \right).$$

Comme

$$x + y = \frac{4q}{p}, \quad x - y = \frac{8pq}{(p^2 + 3q^2)},$$

on en déduit facilement que la seule solution en nombres entiers est donnée par $p = q = 1$, d'où $x = 3, y = 1$.

Cette solution a été donnée t. XVII, p. 395.