

Trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 439-441

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__439_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

TRIGONOMÉTRIE.

a étant un nombre entier positif, on a généralement

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{a\pi}{2} = \frac{1}{2} [1 - (-1)^a] (-1)^{\frac{a-1}{2}}, \\ \cos \frac{a\pi}{2} = \frac{1}{2} [1 + (-1)^a] (-1)^{\frac{a}{2}}. \end{array} \right.$$

M. Carl Spitz, professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe, déduit de là l'universalité des formules connues de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$. (*Archives de Grunert*, t. XXXII, p. 289; 1859.) Il procède ainsi :

α étant plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et a un entier positif, on connaît les diverses valeurs $\pm \sin \alpha$, $\pm \cos \alpha$ et $\sin\left(\alpha + \frac{a\pi}{2}\right)$;

on pose

$$\sin \left(\alpha + \frac{a\pi}{2} \right) = x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

et prenant pour a les diverses valeurs $4n$, $4n \pm 1$, $4n + 2$, on détermine x et y , et l'on a finalement

$$\sin \left(\alpha + \frac{a\pi}{2} \right) = \sin \alpha \cos \frac{a\pi}{2} + \cos \alpha \sin \frac{a\pi}{2},$$

$$\cos \left(\alpha + \frac{a\pi}{2} \right) = \cos \alpha \cos \frac{a\pi}{2} - \sin \alpha \sin \frac{a\pi}{2}.$$

De même, en s'appuyant sur les expressions (1), soient $\alpha = \alpha' + \frac{a\pi}{2}$, $\beta = \beta' + \frac{b\pi}{2}$, α' et β' moindres chacun que $\frac{\pi}{4}$, a et b deux nombres entiers positifs. Faisons

$$a + b = c;$$

on a, d'après ce qui précède,

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \cos \frac{a\pi}{2} + \cos \alpha' \sin \frac{a\pi}{2},$$

$$\cos \alpha = \cos \alpha' \cos \frac{a\pi}{2} - \sin \alpha' \sin \frac{a\pi}{2},$$

$$\sin \beta = \sin \beta' \cos \frac{b\pi}{2} + \cos \beta' \sin \frac{b\pi}{2},$$

$$\cos \beta = \cos \beta' \cos \frac{b\pi}{2} - \sin \beta' \sin \frac{b\pi}{2};$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \sin (\alpha + \beta) = \sin \left(\alpha' + \beta' + \frac{c\pi}{2} \right) \\ = \sin (\alpha' + \beta') \cos \frac{c\pi}{2} + \cos (\alpha' + \beta') \sin \frac{c\pi}{2}; \end{array} \right.$$

car $\alpha' + \beta' < \frac{\pi}{2}$; or $\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, en y substituant

tuant les valeurs de ci-dessus, amène au membre à droite de l'équation (2); d'où

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

Même raisonnement pour $\cos (\alpha + \beta)$.