

Note sur les foyers des courbes planes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 399-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__399_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES FOYERS DES COURBES PLANES.

1. Soient

$$\text{tang } \varphi = a + bi,$$

$$\text{tang } \psi = a - bi;$$

on a

$$\text{tang } (\varphi + \psi) = \frac{2a}{1 - a^2 - b^2} = \text{réelle.}$$

Lorsque $a = 0$, $\text{tang } (\varphi + \psi) = 0$.

$$\text{tang } (\varphi - \psi) = \frac{2bi}{1 + a^2 + b^2};$$

si

$$a^2 + b^2 = 1,$$

alors

$$\operatorname{tang}(\varphi - \psi) = bi.$$

2.

$$\operatorname{tang} \varphi = i = -\frac{1}{i},$$

$$1 + \operatorname{tang}^2 \varphi = 0 = \frac{1}{\cos^2 \varphi};$$

d'où

$$\cos \varphi = \infty$$

et, de même,

$$\sin \varphi = \infty.$$

3.

$$y = xi,$$

$$y = -\frac{x}{i},$$

deux droites imaginaires identiques et satisfaisant pourtant à la condition de la perpendicularité $aa' + 1 = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}(\varphi + \psi) &= \frac{i + \operatorname{tang} \psi}{1 - i \operatorname{tang} \psi} = \frac{(i + \operatorname{tang} \psi)(i + i \operatorname{tang} \psi)}{1 + \operatorname{tang}^2 \psi} \\ &= (\sin \psi + i \cos \psi)(\cos \psi + i \sin \psi) = i = \operatorname{tang} \varphi; \end{aligned}$$

donc la droite imaginaire qui a pour équation $y = xi$, fait avec une droite quelconque un angle dont la tangente est constamment égale à i ; résultat purement analytique : on suppose les axes rectangulaires.

4. Étant donnée une courbe plane C_n , si parmi les $n(n-1)$ tangentes qu'on peut mener d'un point x', y' situé dans le plan de la courbe, il s'en trouve *au moins* deux faisant avec l'axe des x , et par conséquent avec une droite quelconque, des angles dont les tangentes sont $\pm i$; ce point est un *foyer* de la courbe C_n .

C'est la définition qu'on doit à M. Plücker (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 433; t. XII, p. 225).

5. L'équation d'une courbe est satisfaite par une infinité de valeurs imaginaires des coordonnées; c'est *dans ce sens* qu'on dit qu'une courbe passe par une infinité de *points imaginaires*, et de même une courbe a une infinité de *tangentes imaginaires*, et sur chaque tangente imaginaire on peut trouver un point réel, mais un seul, car deux donneraient une tangente réelle. A toute tangente imaginaire correspond un point imaginaire sur la polaire réciproque, et, *vice versa*, à tout point imaginaire de la polaire réciproque correspond une tangente imaginaire de la courbe donnée. La recherche d'un foyer se ramène donc à trouver sur la polaire réciproque un point imaginaire dont la polaire, par rapport à la conique directrice, soit de la forme $x + iy = q$, et si nous parvenons à déterminer un *point réel* sur cette tangente imaginaire, ce point réel est un foyer; conformément à la définition Plücker, on suppose les axes rectangulaires, afin que i soit la tangente de la droite avec l'axe des x .

6. Soit donc

$$U = 0$$

l'équation d'une courbe de degré n et de classe p , axes rectangulaires, et coordonnées trilitères x, y, z .

Prenons pour conique directrice le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

et soit

$$u = 0$$

la polaire réciproque de U ; elle sera de degré p et de classe n .

Prenons sur cette ligne le point x', y', z' ; la polaire de ce point, relativement au cercle, a pour équation

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

Faisons

$$x' = 1, \quad y' = i;$$

l'équation

$$u = 0$$

devient une équation en z de degré p . Soit $x_1 + y_1 i$ une racine de cette équation où x_1 et y_1 sont des quantités réelles; la polaire réciproque passe donc par le point imaginaire $x', y', x_1 + y_1 i$, et la polaire de ce point est

$$xx' + yy' + z(x_1 + iy_1) = 0,$$

droite imaginaire tangente à la courbe $U = 0$, et dont le coefficient angulaire est i .

L'équation de cette polaire, ayant égard aux valeurs x', y' , est satisfaite en prenant

$$x = -x_1, \quad y = -y_1, \quad z = 1;$$

cette droite imaginaire passe donc par le point réel $x_1, y_1, 1$; ce point est donc un foyer. Pour avoir les valeurs x_1, y_1 , on remplace x, y, z par $1, i, x_1 + iy_1$ dans $u = 0$, et l'équation se partage en deux autres équations en x_1, y_1 , à coefficients réels, chacune de degré p : il y a donc au plus p^2 foyers.

7. Les équations des tangentes imaginaires qui passent par les deux foyers sont donc

$$x - x_1 + i(y - y_1) = 0,$$

$$x - x_1 - i(y - y_1) = 0.$$

Décrivons un cercle quelconque ayant pour équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + F = 1;$$

les deux asymptotes imaginaires de ce cercle ont pour équations

$$x - x_1 \pm i(y - y_1) = 0;$$

ce cercle passe donc par deux points imaginaires situés à l'infini; désignons-les par I' , I'' . Les tangentes menées de ces points à la courbe U , sont précisément *des tangentes focales*; p de ces tangentes partent de I' et p autres de I'' et pas davantage, puisque la courbe U est de la classe p . Les intersections de ces deux faisceaux donnent les p^2 foyers : ainsi chaque rayon du faisceau I' coupe le faisceau I'' en p points, mais dont un seul est réel; c'est celui qui est donné par l'intersection de deux rayons $x - x_1 \pm i(\gamma - \gamma_1) = 0$. Il n'y a donc que p foyers réels et $p^2 - p$ (nombre pair) foyers imaginaires. Le nombre de foyers réels est donc égal au nombre qui désigne la classe de la courbe.

8. *Exemple.* Soit

$$U = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy = 0,$$

$$D = ab^2 + a'b'^2 + a''b''^2 - aa'a'' - bb'b'' = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

on aura

$$u = D_a x^2 + D_{a'} y^2 + D_{a''} z^2 + 2D_b yz + 2D_{b'} zx + D_{b''} xy = 0.$$

où D_a est la dérivée de D par rapport à a , etc.

Faisons

$$x = 1, \quad y = i, \quad z = x_1 + iy_1,$$

et séparant les équations, on obtient

$$D_{a''}(x_1^2 - y_1^2) + 2D_{b'}x_1 - 2D_b y_1 + D_a - D_{a'} = 0,$$

$$D_{a''}x_1 y_1 + D_b x_1 + D_{b'} y_1 + D_{b''} = 0,$$

deux hyperboles équilatères dont les intersections donnent les foyers; deux intersections réelles et deux imaginaires. La discussion ne présente nulle difficulté.