

Méthode d'élimination ; d'après M. Cayley

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 397-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__397_2>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉTHODE D'ÉLIMINATION;
D'APRÈS M. CAYLEY.

1. *Lemme.* Soient m et n deux nombres entiers positifs, et $n > m$.

On a

$$x^m y^n - x^n y^m = x^m y^m (y - x) \\ \times (y^{n-m-1} + y^{n-m-2} x + y^{n-m-3} x^2 + \dots).$$

Soient, 1°

$$\varphi x = ax + b = 0,$$

$$\psi(x) = \alpha x + \beta = 0,$$

on a

$$\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x} = a\beta - \alpha b = \begin{vmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{vmatrix},$$

égalant ce déterminant à zéro, on a la résultante des deux équations.

2°.

$$\varphi(x) = ax^2 + bx + c = 0,$$

$$\psi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

on obtient

$$\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x}$$

$$= (b\alpha - \beta a)xy + (c\alpha - \gamma a)(x + y) + c\beta - \gamma b.$$

Représentons par $d_{ik} x^i y^k$ un terme quelconque de cette expression; il faut donner à i et à k les valeurs 0 et 1.

Posant

$$d_{00} = c\beta - \gamma b,$$

$$d_{11} = c\alpha - \gamma a,$$

$$d_{10} = c\alpha - \gamma a,$$

$$d_{11} = b\alpha - \beta a;$$

on aura

$$\begin{vmatrix} d_{10} & d_{01} \\ d_{10} & d_{11} \end{vmatrix} = 0,$$

telle est la résultante.

3°.

$$\varphi x = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots = 0,$$

$$\psi(x) = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \dots = 0.$$

Le quotient $\frac{\varphi(x)\psi(y) - \varphi(y)\psi(x)}{y - x}$, d'après le lemme I,

est une fonction entière en x et y , où chaque terme est de la forme $d_{ik} x^i y^k$; par exemple, on a

$$(b\gamma - \beta\alpha)(x^{n-1}y^{n-2}x^{n-2}y^{n-1}), \quad i = n-1, k = n-2, \dots;$$

d_{ik} est une fonction des coefficients des deux équations, et on a pour résultante le déterminant

$$\begin{vmatrix} 00 & 01 & 02 & \dots & 0, n-1 \\ 10 & 11 & 12 & \dots & 1, n-1 \\ 20 & 21 & 22 & \dots & 2, n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1, 0 & n-1, 1 & 1 & \dots & n-1, n-1 \end{vmatrix} = 0;$$

le déterminant d est sous-entendu.

Observation. Cette méthode revient à la méthode dite abrégée de Bezout. (Voir Faa de Bruno, *Théor. générale de l'élimination*, p. 53.)