

Enveloppes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 366-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__366_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ENVELOPPES.

SALMON, *Higher curves*, p. 94.

1. $a, b, c, \dots$ étant des fonctions linéaires des coordonnées x, y , soit donnée la relation

$$T = a t^n + n b t^{n-1} + \frac{n \cdot n - 1}{2} c t^{n-2} + \dots = 0,$$

où t est un paramètre variable; de sorte que T représente une droite variable dans un plan.

Soit $U = 0$ l'enveloppe de cette droite.

Il est évident que U est de la classe n ; car, à une seule valeur de x, y et t , correspondent n droites tangentes à la courbe U ; l'équation $U = 0$ s'obtient par l'élimination de t entre

$$T = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dt} = 0,$$

ou bien entre

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad nT - t \frac{dT}{dt} = 0;$$

dans cette dernière équation, le terme en t^n disparaît;

d'après le théorème de Cayley (t. XII, p. 396), les coefficients des deux équations montent dans chaque terme au degré $n-1$, et comme ces coefficients sont linéaires, il s'ensuit que le degré de U est $2(n-1)$. La classe devrait être dans le cas général $2(n-1)(2n-3)$; mais elle est de la classe n : donc la relation $T=0$ ne peut donner les courbes générales de la classe n ; il y a donc des points multiples.

Points de rebroussement. $T=0$, $\frac{dT}{dt}=0$, $\frac{d^2T}{dt^2}=0$,

$$T = at^n + nb t^{n-1} + \frac{n(n-1)c}{1.2} t^{n-2} + \dots,$$

$$\frac{dT}{dt} = n \left[at^{n-1} + (n-1)bt^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)c}{1.2} t^{n-3} + \dots \right],$$

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2T}{dt^2} = n(n-1) \\ \times \left[at^{n-2} + (n-2)bt^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)c}{1.2} t^{n-4} + \dots \right] = 0, \end{array} \right.$$

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} nT - \frac{t dT}{dt} \\ = n \left[bt^{n-1} + (n-1)ct^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)dt^{n-3}}{1.2} + \dots \right], \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} n(n-1) \frac{dT}{dt} - \frac{d^2T}{dt^2} = n(n-1) \\ \times \left[bt^{n-2} + (n-2)ct^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)dt^{n-4}}{1.2} + \dots \right] = 0, \end{array} \right.$$

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} (n-1)(b) - t(c) = n(n-1) \\ \times \left[ct^{n-2} + (n-2)dt^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)et^{n-4}}{1.2} + \dots \right] = 0. \end{array} \right.$$

Éliminant x et y entre les équations (a), (c), (d), on obtient une équation en t du degré $3(n-2)$; on a donc autant de points de rebroussement.

Points multiples. Dans la relation (1), on connaît donc pour le cas actuel : n classe de U ; m degré et x nombre de points de rebroussement. Substituant ces valeurs, on trouve pour le nombre de points multiples δ ,

$$\delta = 2(n-2)(n-3).$$

Points d'inflexion. $T = 0$ et $\frac{dT}{dt} = 0$ représentent deux droites qui doivent coïncider aux points d'inflexion ; cette identification n'est pas possible dans le cas général.

Tangente-double. L'équation $T = 0$ peut se mettre sous la forme

$$x F_1(t) + y F_2(t) + F_3(t) = 0;$$

pour qu'il y ait une tangente-double, il faut que pour deux valeurs différentes t_1, t_2 les deux droites coïncident.

Lorsque $n = 3$, on ne trouve qu'une seule double-tangente.

Observation. Lorsque a, b, c sont des fonctions de degré r , l'équation en U est de degré $2r(n-1)$.

Ainsi, si $n = 2, r = 1, U = 0$ représente une conique.

2. $A\mu^n + B\mu^p + C = 0$; A, B, C fonction d'un paramètre variable.

Équation de l'enveloppe :

$$n^n A^p C^{n-p} \pm p^n (n-p)^{n-p} B^n = 0.$$

Le signe $+$ pour n impair et $-$ pour n pair.

3. $A \cos^m \theta + B \sin^m \theta = C$; θ paramètre variable.

Équation de l'enveloppe :

$$A^{\frac{2}{2-m}} + B^{\frac{2}{2-m}} = C^{\frac{2}{2-m}}.$$

Ainsi, toute tangente à une courbe donnée par l'équa-

tion $x^n + y^n = a^n$, peut être exprimée par l'équation

$$x \cos \theta^{\frac{2(n-1)}{n}} + y^{\frac{2(n-1)}{n}} = a.$$

4. $(A\alpha)^m + (B\beta)^m + C^m = 0$, α, β paramètres variables entre lesquels on donne la relation $(a\alpha)^n + (b\beta)^n + c^n = 0$; A, B, C fonctions de x, y ; a, b, c, m, n , constantes données.

Soit

$$\frac{mn}{m-n} = p.$$

On obtient pour équation de l'enveloppe :

$$\left(\frac{a}{A}\right)^p + \left(\frac{b}{B}\right)^p + \left(\frac{c}{C}\right)^p = 0.$$

5. *Polaire réciproque.* $f(x, y, z) = 0$, équation homogène de la courbe;

$$x_1, y_1, z_1,$$

coordonnées d'un point de cette courbe;

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

équation de la directrice (cercle imaginaire);

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0,$$

équation de la tangente à la polaire réciproque.

L'enveloppe de cette droite donne l'équation de la polaire réciproque; les paramètres variables x_1, y_1, z_1 sont liés par la relation $f(x_1, y_1, z_1) = 0$, il suffit d'éliminer z_1 : on obtient une équation homogène en x_1, y_1 . Ordonnant par rapport à x_1, y_1 , et écrivant que l'équation a deux racines égales, on obtient l'équation de la polaire réciproque, car x, y, z sont considérées comme coordonnées du point de contact de la droite avec la polaire réciproque.

Application.

$$a x^2 + a' y^2 + a'' z^2 + a'' z^2 + 2 b yz + 2 b' zx + 2 b'' xy = 0.$$

Représentons par Δ le déterminant : on a

$$\Delta = a b^2 + a' b'^2 + a'' b''^2 - a a' a'' - 2 b b' b'' = \begin{vmatrix} a, & b', & b'' \\ b'', & b, & a' \\ b', & a'', & b \end{vmatrix}$$

l'équation de la polaire réciproque relativement au cercle $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ est

$$x^2 \Delta_a + y^2 \Delta_{a'} + z^2 \Delta_{a''} + yz \Delta_{b''} + zx \Delta_{b'} + yx \Delta_{b''} = 0,$$

où

$$\Delta_a = \frac{d\Delta}{da}, \quad \Delta_b = \frac{d\Delta}{db}, \dots$$

L'équation de la polaire réciproque se déduit donc de l'équation donnée, en remplaçant le coefficient de chaque terme par la dérivée partielle analogue du déterminant.

Il y a deux moyens de trouver l'équation d'une polaire réciproque : 1° comme enveloppe d'une tangente ; 2° comme lieu du pôle d'une tangente. M. Salmon préfère la première méthode, et en a montré l'application aux courbes du quatrième ordre. (*High. curves*, page 101; 1852.) M. Cayley a, le premier, donné la polaire réciproque des courbes du troisième ordre. (*Camb. and Dub. mat. Journ.* ; t. I, p. 97; 1846.)

Note. Sauf une plus simple démonstration, le procédé pour la limite des racines décrit page 310 a déjà été donné par M. Desboves (t. XIII, p. 60; 1854).