

GERONO

Questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 343-345

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__343_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUESTIONS D'EXAMEN (ECOLE POLYTECHNIQUE).

Condition pour que deux génératrices rectilignes de l'hyperboloïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ se coupent sous un angle droit. Lieu géométrique du point d'intersection.

En désignant par α et ϵ deux angles quelconques, les équations des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde sont, pour l'un des deux systèmes,

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos \alpha + \sin \alpha,$$

$$\frac{y}{b} = \frac{z}{c} \sin \alpha - \cos \alpha;$$

et pour l'autre,

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c} \cos \epsilon + \sin \epsilon,$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{z}{c} \sin \epsilon + \cos \epsilon.$$

Les coordonnées d'un point commun à deux génératrices de systèmes différents sont déterminées par

$$\frac{z'}{c} = \frac{\cos \alpha + \cos \epsilon}{\sin \alpha + \sin \epsilon} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)},$$

$$\frac{y'}{b} = \left(\frac{\cos \alpha + \cos \epsilon}{\sin \alpha + \sin \epsilon} \right) \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)},$$

$$\frac{x'}{a} = \left(\frac{\cos \alpha + \cos \epsilon}{\sin \alpha + \sin \epsilon} \right) \cos \alpha + \sin \alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)}.$$

Le carré de la distance de ce point au centre de la surface a pour expression

$$(1) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{a^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) + c^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)}.$$

Quand $\sin \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) = 0$, les deux génératrices sont parallèles. La condition pour qu'elles soient perpendiculaires est, d'après une formule connue,

$$\frac{a^2}{c^2} \cos \alpha \cos \epsilon - \frac{b^2}{c^2} \sin \alpha \sin \epsilon + 1 = 0,$$

ou

$$(2) \quad a^2 \cos \alpha \cos \epsilon - b^2 \sin \alpha \sin \epsilon + c^2 = 0.$$

De cette dernière relation on peut conclure que la *distance du centre de l'hyperboloïde au point d'intersection de deux génératrices rectangulaires est invariable*.

Car, en observant qu'on a, quels que soient α et ϵ ,

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \epsilon &= \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon), \\ -\sin \alpha \sin \epsilon &= \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon), \\ 1 &= \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) + \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon), \end{aligned}$$

la relation (2) devient

$$\begin{aligned} &a^2 \left[\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \right] \\ &+ b^2 \left[\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) - \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \right] \\ &+ c^2 \left[\cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) + \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \right] = 0 \end{aligned}$$

et donne successivement :

$$\begin{aligned} a^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) + c^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon) \\ = (a^2 + b^2 - c^2) \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon); \\ \frac{a^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) + b^2 \sin^2 \frac{1}{2}(\alpha - \epsilon) + c^2 \cos^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha + \epsilon)} = a^2 + b^2 - c^2. \end{aligned}$$

Il en résulte, en ayant égard à l'équation (1),

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

D'après cela, on voit que le lieu géométrique des points d'intersection des génératrices rectangulaires est celui des points communs à l'hyperboloïde et à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

Pour que le rayon de cette sphère ait une valeur réelle différente de zéro, il faut d'abord que c^2 soit moindre que $a^2 + b^2$. Quant à l'existence de points communs à la sphère et à l'hyperboloïde, elle exige que le rayon de la sphère soit au moins égal à la moitié du plus petit des deux axes de l'ellipse de gorge représentée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, puisque la plus courte distance du centre de l'hyperboloïde à un point de la surface, est précisément égale à la moitié de cet axe. Par conséquent, en supposant $b < a$, la condition de l'intersection de la sphère et de l'hyperboloïde est $a^2 + b^2 - c^2 > b^2$, ou $c < a$. S'il y avait égalité entre a et c , la sphère serait tangente à l'hyperboloïde aux deux extrémités de l'axe $2b$, et ces deux points seraient les seuls où deux génératrices rectilignes de la surface se couperaient sous un angle droit.

G.