

P. SERRET

Théorème sur les roulettes

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 341-342

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__341_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES ROULETTES;

PAR M. P. SERRET.

1. *Si l'on considère l'arc de roulette engendré par un point o invariablement lié à une courbe mobile, pendant que l'arc MN de cette courbe roule sans glisser sur une droite; et l'arc conjugué de la courbe-podaire, lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du même point o (regardé comme immobile) sur les diverses tangentes de l'arc MN (devenu fixe) : ces deux arcs conjugués auront même longueur.*

Ce théorème, qui est peut-être nouveau, donne lieu à plusieurs conséquences : ainsi, un arc quelconque de la

podaire d'une circonférence par rapport à un point de son plan est mesuré par une portion de droite, ou par un arc d'ellipse, suivant que ce point appartient ou non à la circonférence; inversement, un arc quelconque de la roulette produite par le roulement sur une droite d'un arc d'ellipse ou de parabole, le point décrivant étant le foyer, est égal à un arc de cercle ou à une portion de droite.

Pour le démontrer, désignons par $ds, ds', d\sigma$ les arcs élémentaires correspondants de la courbe MN, de la podaire M'N' et de la roulette engendrée par le point O; soient r, r' les rayons vecteurs correspondants OM, OM', et ρ le rayon de courbure en M de la courbe MN. D'après une *expression* connue, on a

$$d\sigma = \frac{r ds}{\rho};$$

une formule due à Euler, $\rho = \frac{r dr}{dr'}$, peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{dr'}{r dr};$$

enfin, l'égalité connue des angles sous lesquels les rayons vecteurs OM, OM' coupent la courbe MN et la podaire M'N', fournit cette dernière relation : $\frac{dr}{ds} = \frac{dr'}{ds'}$, ou

$$\frac{dr'}{dr} = \frac{ds'}{ds}.$$

Or si l'on multiplie membre à membre ces trois égalités, on trouve, en simplifiant, la relation $d\sigma = ds'$, qui démontre le théorème énoncé.

Note du Rédacteur. Le théorème a été énoncé et démontré par M. Steiner (Crelle, t. XXI, p. 35; 1846) et ensuite par M. Mannheim (l'*Institut*, 24 février 1858) qui m'a communiqué ce renseignement.
