

J. DE VIRIEU

Seconde solution de la question 461

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 273-277

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__273_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 461

(voir page 242);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Regent à Saumur.

I. La sommation de la série proposée peut se déduire du théorème suivant qui fait connaître une infinité de séries convergentes et leurs sommes.

Soient x_0 une quantité entière nulle, positive ou négative; x une variable entière; u_x une fonction de cette variable qui, lorsque cette dernière croît de x_0 inclusivement à l'infini positif, reste toujours déterminée ainsi que

Δu_x et tend vers une limite unique finie ou nulle. U représentant cette limite, on a

$$(A) \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \Delta u_x = U - u_{x_0}.$$

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'équation connue

$$u_{x_0+i+1} = u_{x_0} + \Delta u_{x_0} + \Delta u_{x_0+1} + \dots + \Delta u_{x_0+i}.$$

III. Soient p, q des nombres entiers absolus non nuls; f, g des quantités entières distinctes telles, que

$$f + x_0 \geq 1, \quad g + x_0 \geq 1.$$

Si

$$u_x = \frac{1}{(x+f)(x+f+1)\dots(x+f+p-1)},$$

on a

$$U = 0, \quad \Delta u_x = -\frac{p}{x+f+p} \cdot u_x.$$

Si

$$u_x = \frac{(x+g)(x+g+1)\dots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\dots(x+f+p-1)},$$

on a

$$U = 1, \quad \Delta u_x = -p(q-f) \frac{u_x}{(x+g)(x+f+p)}.$$

Si

$$u_x = \frac{(x+g)(x+g+1)\dots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\dots(x+f+p+q-1)},$$

on a

$$U = 0, \quad \Delta u_x = -\frac{q(x+g)+p(g-f)}{(x+g)(x+f+p+q)} u_x.$$

Si

$$u_x = \sqrt{\frac{(x+g)(x+g+1)\dots(x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\dots(x+f+p-1)}},$$

on a

$$U = 1,$$

$$\Delta u_x = p(f-g) \frac{\sqrt{\frac{1}{x+g} \cdot \frac{(x+g) \dots (x+g+p-1)}{(x+f) \dots (x+f+p)}}}{\sqrt{(x+f)(x+g+p)} + \sqrt{(x+g)(x+f+g)}}.$$

Si

$$u_x = \log \frac{(x+g)(x+g+1) \dots (x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1) \dots (x+f+p-1)},$$

on a

$$U = 0, \quad \Delta u_x = -\log \left(\frac{x+g}{x+f} \cdot \frac{x+f+p}{x+g+p} \right).$$

III. Substituant ces valeurs et ces limites successive-
ment dans l'équation A, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{1}{(x+f)(x+f+1) \dots (x+f+p)} \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{(x_0+f)(x_0+f+1) \dots (x_0+f+p-1)}, \\ & \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{1}{x+g} \cdot \frac{(x+g)(x+g+1) \dots (x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1) \dots (x+f+p)} \\ &= \frac{1}{p} \frac{1}{g-f} \left[\frac{(x_0+g)(x_0+g+1) \dots (x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1) \dots (x_0+f+p-1)} - 1 \right], \\ & \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{q(x+g) + p(g-f)}{x+g} \\ & \times \frac{(x+g)(x+g+1) \dots (x+g+p-1)}{(x+f)(x+f+1) \dots (x+f+p+q)} \\ &= \frac{(x_0+g)(x_0+g+1) \dots (x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1) \dots (x_0+f+p+q-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x+g} \cdot \frac{(x+g)(x+g+1)\dots(x+q+p-1)}{(x+f)(x+f+1)\dots(x+f+p+q)}}}{\sqrt{(x+f)(x+q+p)} + \sqrt{(x+g)(x+f+p)}} \\
&= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{f-g} \left[1 - \sqrt{\frac{(x_0+q)(x_0+g+1)\dots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\dots(x_0+f+p-1)}} \right], \\
& \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \log \left(\frac{x+g}{x+f} \cdot \frac{x+f+p}{x+g+p} \right) \\
&= \log \left[\frac{(x_0+g)(x_0+g+1)\dots(x_0+g+p-1)}{(x_0+f)(x_0+f+1)\dots(x_0+f+p-1)} \right].
\end{aligned}$$

On aura la série proposée en posant

$$x_0 = 0, \quad f = 1, \quad p = n - 1$$

dans la première des formules ci-dessus.

IV. Soient m, n, b, c des quantités non nulles telles, que

$$cm = bn \leq 0;$$

et α une quantité non nulle telle, que la fonction $b\alpha^x + c$ ne soit jamais nulle quand on fait croître x de x_0 à $+\infty$.

Posons

$$u_x = \frac{m\alpha^x + n}{b\alpha^x + c},$$

$$\Delta u_x = (cm - bn)(\alpha - 1) \frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1} + c)(b\alpha^x + c)}.$$

Si

$$\alpha = +1,$$

u_x n'est pas une fonction de x ; si

$$\alpha = -1,$$

la limite n'est pas unique.

$$0 < \alpha^2 < 1, \quad U = \frac{n}{c}; \quad \text{si } 1 < \alpha^2, \quad U = \frac{m}{b}.$$

Substituant dans A

$$0 < \alpha^2 < 1, \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1} + c)(b\alpha^x + c)} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \alpha} \cdot \frac{\alpha^{x_0}}{b\alpha^{x_0} + c},$$

$$1 < \alpha^2, \quad \sum_{x=x_0}^{x=+\infty} \frac{\alpha^x}{(b\alpha^{x+1} + c)(b\alpha^x + c)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{b\alpha^{x_0} + c}.$$
