NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EUGÈNE ROUCHÉ

Sur l'interpolation

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 18 (1859), p. 26-32

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__26_1>

SUR L'INTERPOLATION (*);

PAR M. EUGÈNE ROUCHÉ,
Professeur au lycée Charlemagne, Docteur ès Sciences mathématiques.

I.

1. Dans l'un de ses intéressants articles sur divers points du Cours de Mathématiques spéciales, M. Gerono a indiqué un moyen de déduire la formule d'interpolation de Newton de celle de Lagrange.

Je me propose de donner de ce même problème une solution assez facile et assez courte pour être introduite dans les Éléments. Toutefois, je ne serais peut-être pas revenu sur cette question, sans une circonstance particulière, qui se présente d'ailleurs assez fréquemment en mathématiques.

Lorsqu'on aborde le problème dont je viens de parler, il suffit d'un coup d'œil pour voir que la formule de Lagrange, dans sa forme habituelle, ne se prête pas aisément à la transformation demandée. Une préparation préalable est nécessaire pour éviter de longs calculs. En cherchant à grouper convenablement les termes, j'ai été

(*) D'après une thèse récemment soutenue dont nous rendrons compte.

conduit à une forme, qui non-seulement fournit une solution presque immédiate du problème proposé, mais qui est en général beaucoup plus commode pour la mise en nombres. Cette forme n'est d'ailleurs nouvelle qu'en apparence; elle ne diffère pas *au fond* d'une formule *énoncée dans des termes différents* par Newton dans un paragraphe des *Principes*, et reproduite par Lacroix dans son *Traité de calcul différentiel et intégral.*

Pour rendre ce travail utile aux lecteurs auxquels ce journal s'adresse, je commencerai par exposer ma solution du problème que j'avais d'abord en vue; je montrerai ensuite l'identité de la nouvelle forme de la formule de Lagrange avec celle qui résulte de la traduction analytique de l'énoncé de Newton.

II.

2. Soit u_x une fonction dont on connaît les $m+1$ valeurs

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_0,\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_m, \\ \quad\text{pour} \\ x_0,\ x_1,\ x_2,\ldots,\ x_m. \end{array}\right.$$

Posons, en général,

$$(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)=\varphi_n(x);$$

et remplaçons, dans la formule de Lagrange,

$$(A)\qquad u_x=\sum_{i=0}^{i=m}\frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi'_m(x_i)}\cdot\frac{x-x_m}{x-x_i}\cdot u_i,$$

la fraction

$$(2)\qquad \frac{x-x_m}{x-x_i}$$

par

$$1+\frac{x_i-x_m}{x-x_i}.$$

La fraction (2) se réduisant à l'unité pour $i = m$, nous décomposerons ainsi le second membre en deux sommes partielles, dont la seconde ne s'étendra que de $i = 0$ à $i = m - 1$. Nous aurons, de la sorte,

$$u_x = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\varphi'_m(x_i)} u_i + \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{\varphi_{m-1}(x)}{\left[\frac{\varphi'_m(x_i)}{x_i - x_m}\right]} \cdot \frac{1}{x - x_i} \cdot u_i,$$

ou

$$u_x = \sum_{i=0}^{i=m} \frac{\varphi_m(x)}{x - x_m} \cdot \frac{u_i}{\varphi'_m(x_i)} + \sum_{i=0}^{i=m-1} \frac{\varphi_{m-2}(x)}{\varphi'_{m-1}(x_i)} \cdot \frac{x - x_{m-1}}{x - x_i} \cdot u_i.$$

La seconde partie étant de même forme que le deuxième membre de la formule (A), on peut lui appliquer le même procédé de décomposition ; en opérant de même sur le résultat, et continuant ainsi, on obtient la formule

$$\text{(B)} \qquad u_x = \sum_{n=0}^{n=m} \left[\frac{\varphi_n(x)}{x - x_n} \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)} \right],$$

que nous avions annoncée et qui se prête mieux aux calculs numériques que la formule (A).

3. Voici maintenant un lemme :

La somme

$$\text{(3)} \qquad \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)}$$

se réduit à

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{h^n} \cdot \frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n},$$

lorsqu'on prend pour $x_0, x_1, \ldots, x_m$ *les valeurs équidistantes* $x_0, x_0 + h, \ldots, x_0 + mh$.

En effet, l'égalité

$$\varphi'_n(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)$$

donne pour ces valeurs de la variable x

$$\varphi'_n(x_i) = (-1)^{n-i} h^n . 1.2\ldots n . \frac{1.2\ldots i}{n(n-1)\ldots(n-i+1)},$$

la somme (3) a donc pour limite l'expression

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\frac{1}{h^n}\sum_{i=0}^{i=}\frac{(-1)^{n-i}[n(n-1)\ldots(n-i+1)]}{1.2\ldots i}u_i,$$

qui n'est autre que (4).

4. Cela posé, la substitution de $x_0 + ih$ à x_i transforme la formule (B) en la suivante :

$$u_x = \sum_{n=0}^{n=m}\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)\ldots(x-x_0-\overline{n-1}\,h)}{h^n}\cdot\frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n},$$

ou

$$\text{(C)}\quad u_x = \sum_{n=0}^{n=m}\left(\frac{x-x_0}{h}\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right)\frac{\Delta^n u_0}{1.2\ldots n},$$

qui est précisément la formule d'interpolation de Newton, relative au cas où la variable croît par degrés égaux. Le problème proposé est donc résolu.

III.

5. Dans le lemme V du III[e] livre des *Principes*, après avoir énoncé la formule (C), relative au cas où la variable reçoit des valeurs équidistantes, Newton ajoute :

Sunto puncta, A, B, C, D, E, etc.; *ab iisdem ad rectam quamvis positione datam* HN *demitte perpendicula quotcunque* AB, BI, CK, DL, EM.

Si punctorum H, I, K, L, etc..., *inæqualia sunt intervalla* HI, LK, etc..., *collige perpendiculorum* AH, BI, CK, etc., *differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas* b, 2b, 3b, 4b, 5b,..., *secundas per intervalla bina divisas* c, 2c, 3c, 4c,..., *tertias per intervalla terna divisas* d, 2d, 3d,..., *quartas per intervalla quaterna divisas* e, 2e,..., *et sic deinceps; ita ut sit*

$$b = \frac{\mathrm{AH} - \mathrm{BI}}{\mathrm{HI}}, \quad 2b = \frac{\mathrm{BI} - \mathrm{CK}}{\mathrm{IK}}, \quad 3b = \frac{\mathrm{CK} - \mathrm{DL}}{\mathrm{KM}}, \ldots;$$

dein

$$c = \frac{b - 2b}{\mathrm{HK}}, \quad 2c = \frac{2b - 3b}{\mathrm{IL}}, \quad 3c = \frac{3b - 4b}{\mathrm{KM}}, \ldots;$$

postea

$$d = \frac{c - 2c}{\mathrm{HL}}, \quad 2d = \frac{2c - 3c}{\mathrm{IM}}, \ldots.$$

Inventis differentiis, dic AH=a, —HS=p, p *in* —IS=q, q *in* + SK=r, r *in* + SL=s, s *in* + SM=T,...; *pergendo scilicet usque ad perpendiculum ultimum* ME, *et erit ordinatim applicata*

$$(\mathrm{D}) \qquad \mathrm{RS} = a + bq + cq + dr + es + ft \ldots.$$

6. Pour traduire cet énoncé analytiquement de la manière la plus générale, reprenons les deux suites (1). Appelons *rapports du premier ordre* et désignons par R_i les m quantités de la forme

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i};$$

nommons *rapports du second ordre* et représentons généralement par R_i^2 les $m - 1$ quantités de la forme

$$\frac{\mathrm{R}_{i+1} - \mathrm{R}_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

En continuant ainsi, on obtiendra en général $m-n+1$ *rapports de l'ordre* n de la forme

$$R_i^n = \frac{R_{i+1}^{n-1} - R_i^{n-1}}{x_{i+n} - x_i}.$$

Il n'y a qu'un rapport de l'ordre m

$$R_0^m = \frac{R_1^{m-1} - R_0^{m}}{x_m - x_0},$$

et pas de rapport d'ordres supérieurs. On aurait des rapports d'ordre quelconque si les suites (1) étaient illimitées.

Notez d'ailleurs que *lorsque la variable* x *croît par degrés égaux à* h, *depuis* x_0 *jusqu'à* $x_0 + mh$, *on a, en général,*

$$(5) \qquad R_i^n = \frac{1}{h^n} \frac{\Delta^n u_i}{1.2\ldots n}.$$

Dans ce système de notations, la formule (D) s'écrit

$$u_x = u_0 + (x - x_0) R_0 + (x - x_0)(x - x_1) R_0^2 + \ldots \\ + (x - x_0) \ldots (x - x_{m-1}) R_0^m,$$

ou

$$(E) \qquad u_x = \sum_{n=0}^{n=m} \frac{\varphi_n(x)}{x - x_n} R_0^n.$$

7. Pour montrer l'identité des formules (B) et (E), il suffit de prouver qu'on a généralement

$$(6) \qquad R_0^n = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{u_i}{\varphi'_n(x_i)}.$$

On arrive sans difficulté en employant le tour de raisonnement de proche en proche. Laissant au lecteur le soin de vérifier l'égalité pour les rapports du premier et du second ordre, je me bornerai à démontrer que si la loi (6) est vraie pour les rapports du n^{ieme} ordre, elle subsiste pour R_0^{n+1}.

Posons, à cet effet,

$$\psi_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n+1}),$$

d'où

$$(x - x_{n+1})\,\varphi_n(x) = (x - x_0)\,\psi_n(x) = \varphi_{n+1}(x),$$

et en divisant $x - x_\iota$, puis faisant $x = x_\iota$

$$(7)\qquad (x_\iota - x_{n+1})\,\varphi'_n(x_\iota) = (x_\iota - x_0)\,\psi'_n(x_\iota) = \varphi'_{n+1}(x_\iota).$$

Or on a

$$R_0^n = \sum_{\iota=0}^{\iota=n} \frac{u_\iota}{\varphi'_n(x_\iota)},\qquad R_1^n = \sum_{\iota=1}^{\iota=n+1} \frac{u_\iota}{\psi'_n(x_\iota)},$$

$$R_0^{n+1} = \frac{R_1^n - R_0^n}{x_{n+1} - x_0} = \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{u_\iota}{x_{n+1} - x_0}\left[\frac{1}{\psi'_n(x_\iota)} - \frac{1}{\varphi'_n(x_\iota)}\right]$$
$$+ \frac{1}{x_{n+1} - x_0}\left[\frac{u_{n+1}}{\psi'_n(x_{n+1})} - \frac{u_0}{\varphi'_n(x_0)}\right],$$

ou, eu égard à la relation (7),

$$R_0^{n+1} = \frac{u_0}{\varphi'_{n+1}(x_0)} + \sum_{\iota=1}^{\iota=n} \frac{u_\iota}{\varphi'_{n+1}(x_\iota)}\left[\frac{x_\iota - x_0}{x_{n+1} - x_0} - \frac{x_\iota - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_0}\right]$$
$$+ \frac{u_{n+1}}{\varphi'_{n+1}(x_{n+1})} = \sum_{\iota=0}^{\iota=n+1} \frac{u_\iota}{\varphi'_{n+1}(x_\iota)},$$

c'est la loi (6) appliquée à R_0^{n+1}.

8. Remarquons, pour finir, que la comparaison des relations (5) et (6) explique clairement pourquoi la somme (3) se réduit à l'expression (4), lorsqu'on fait croître la variable par degrés égaux. Elle fournit même la démonstration la plus logique, sinon la plus courte (n° 3), de ce lemme.