

Limites de la série harmonique (solution des questions 452 et 453) ; d'après M. Schlömilch

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 172-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__172_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIMITES DE LA SÉRIE HARMONIQUE

(Solution des questions 452 et 453);

D'APRÈS M. SCHLÖMILCH.

1. Lemme.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n > n \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$$

$$2. \quad \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} > (n+1)^{\frac{1}{n}} \text{ (lemme),}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \dots + \frac{n}{n} = n,$$

(*) Vient de publier dix-sept *Lessons sur l'algèbre supérieure moderne*, préliminaires d'un ouvrage sur les *High surfaces*, faisant suite aux *High curves*; clarté extrême, profondeur et élévation. Nous en parlerons souvent.

d'où par soustraction

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > n \left[(1+n)^{\frac{1}{n}} - 1 \right].$$

3.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} > n (n+1)^{-\frac{1}{n}},$$

$$\frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots + \frac{n+1}{n+1} = n,$$

par soustraction

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < n \left[1 - (n+1)^{-\frac{1}{n}} \right],$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < n \left[1 - (n+1)^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1} \right];$$

c'est la solution de la question 452 (t. XVII, p. 434).

Posons

$$e^{n\delta} = n+1, \quad n\delta = l.n+1, \quad n = \frac{l.(n+1)}{\delta},$$

ainsi

$$S_n > \frac{l.n+1}{\delta} (e^\delta - 1).$$

$$S_n < \frac{n}{n+1} + \frac{l.n+1}{\delta} (1 - e^{-\delta}).$$

Or

$$1 < \frac{e^\delta - 1}{\delta},$$

$$1 > \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta};$$

donc

$$S_n > l(n+1),$$

$$S_n < 1 + l(n+1);$$

c'est la solution de la question 453.

Le rapport arithmétique des deux limites est constant ; le rapport géométrique approche de l'unité avec n croissant : donc la différence entre S_n et ses limites diminue de plus en plus.

M. Schlömilch fait observer que les limites logarithmiques peuvent s'obtenir par la considération des séries $l(1+x)$ et $\log(1-x)$; c'est ce qu'a fait l'élève Michaux (p. 68).

Le procédé de M. Schlömilch s'applique à la série

$$\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 2} + \dots + \frac{1}{\alpha + n}.$$