

Lieu géométrique de certain point dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 163-165

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__163_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LIEU GÉOMÉTRIQUE DE CERTAIN POINT DANS LES CONIQUES.

1. Soit

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

l'équation d'une conique rapportée à des axes quelconques.

Supposons que le coefficient C varie de $-\infty$ à $+\infty$ et que les cinq autres coefficients soient des fonctions entières algébriques *données* de deux quantités α et ϵ ;

$$\begin{aligned} dy + ex + f &= 0 \\ d_1y + e_1x + f_1 &= 0, \end{aligned}$$

sont les équations *données* de deux droites tangentes à la conique; il s'agit de trouver le lieu géométrique du point qui a pour coordonnées α et β .

L'équation de condition pour que la première droite soit tangente, est

$$4C[fdD - f^2A - d^2F] + d^2E^2 + e^2[D^2 - 4AF] + f^2B^2 + 2de[2BF - DE] - 2fdBF + 2fe[2AE - BD] = 0.$$

(Voir les *Nouvelles Annales*, t. II, p. 108.)

On a une équation semblable pour la seconde droite.

Éliminant C, on trouve pour l'équation du lieu cherché

$$\left. \begin{aligned} & AE^2[d^2f_1^2 - d_1^2f^2] \\ & DE^2dd_1[d_1f - df_1] \\ & F[D^2 - 4AF][e^2d_1^2 - e_1^2d] \\ & A[D^2 - 4AF][e^2f_1^2 - e_1^2f^2] \\ & D[D^2 - 4AF][e_1^2fd - e^2f_1d_1] \\ & B^2F[f^2d_1^2 - f_1^2d^2] \\ & B^2Dff_1[f_1d - fd_1] \\ & 2F[2BF - DE]dd_1[d_1e - de_1] \\ & 2A[2BF - DE][def_1^2 - d_1e_1f^2] \\ & 2D[2BF - DE]dd_1[e_1f - ef_1] \\ & + 2BEFdd_1[df_1 - d_1f] \\ & + 2BEAff_1[fd_1 - f_1d] \\ & + 2F[2AE - BD][fed_1^2 - f_1e_1d^2] \\ & + 2A[2AE - BD]ff_1[f_1e - fe_1] \\ & + 2D[2AE - BD]ff_1[de_1 - d_1e] \end{aligned} \right\} = 0,$$

Lorsque $B = 0$ et que $D^2 - 4AF$ a un facteur commun en α et β avec E , le degré du lieu s'abaisse; de même si A a un facteur commun en α et β avec D .

Application. Soit

$$A = 1, B = 0, D = -2\beta, E = -2\alpha, F = \alpha^2 + \beta^2,$$

l'équation du lieu devient, après avoir divisé par α ,

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned} & [e^2 d_1^2] \alpha^3 + 2 dd_1 [de_1] \alpha^2 \beta + [e^2 d_1^2] \alpha \beta^2 + 2 dd_1 [de_1] \beta^3 \\ & + 2 \alpha^2 [f_1 e_1 d^2] + 2 [e^2 f_1 d_1] \alpha \beta + 2 \beta^2 [f_1 e_1 d^2] \\ & + [d^2 f_1^2] \alpha + 2 \beta [ef' + e'f] [df_1] + 2 ff_1 [f_1 e]. \end{aligned} \right.$$

Les termes du troisième degré peuvent se mettre sous la forme

$$[\alpha^2 + \beta^2] [\alpha (e^2 d^2) + 2 \beta dd_1 (de_1)];$$

ainsi il n'y a qu'une asymptote réelle (*).

Lieu du centre.

Ordonnant l'équation (A) par rapport à α , on a

$$(B) \quad P \alpha^3 + Q \alpha^2 + R \alpha + S = 0;$$

$$P = [e^2 d_1^2],$$

$$Q = 2 dd_1 [de_1] \beta + 2 [f_1 e_1 d^2],$$

$$R = [e^2 d_1^2] \beta^2 + [f_1 d_1 e^2] + [d^2 f_1^2],$$

$$S = 2 dd_1 [de_1] \beta^3 + 2 [f_1 e_1 d^2] \beta^2 + 2 [ef_1 + e_1 f] [df_1] \beta + 2 ff_1 [f_1 e].$$

désignons par α' , α'' , α''' les trois racines de l'équation (B) et par x , y les coordonnées du centre, on a

$$y = \beta,$$

et l'équation du lieu du centre est

$$\left(x - \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \right) \left(x - \frac{\alpha' + \alpha'''}{2} \right) \left(x - \frac{\alpha'' + \alpha'''}{2} \right).$$

La théorie des fonctions symétriques donne

$$8P^2 x^3 - 8PQ x^2 + 2x(RP - Q^2) + P(QR - S) = 0,$$

dans laquelle on remplace β par y . Ainsi, on obtient une équation du troisième degré, en x et y ; ce qu'on pouvait prévoir a priori.

(*) Cas particulier. α , β , coordonnées du foyer; axe des y directrice; axes rectangulaires.