

GENOCCHI

Seconde solution de la question 457

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 161-163

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__161_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 457

(voir page 125);

PAR M. GENOCCHI.

La série proposée est un cas particulier de la série hypergéométrique

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \dots,$$

Ann. de Mathémat., t. XVIII. (Mai 1859.)

11

que Gauss a considérée d'une manière générale et avec toute la rigueur désirable. Il a exprimé la somme de cette série par des fonctions *gamma*, et donné la condition nécessaire et suffisante de sa convergence qui est simplement la suivante

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 0.$$

En faisant

$$\alpha = \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = 1,$$

on trouve la formule de M. Catalan.

On peut aussi la démontrer par la méthode de Parseval. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots, \\ \sqrt{1-x^{-1}} &= 1 - \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}x^{-2} - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^{-3} - \dots,\end{aligned}$$

séries qui sont convergentes *toutes les deux* lorsque le *module* analytique de x est l'unité. En multipliant, on obtient un résultat de cette forme

$$(1) \quad \sqrt{2 - (x + x^{-1})} = A + \sum Bx^m + \sum Cx^{-n},$$

où

$$A = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots$$

Je fais maintenant

$$x = \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi,$$

je multiplie (1) par $d\varphi$ et j'intègre de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$. Il vient

$$\sqrt{2 - (x + x^{-1})} = \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi,$$

$$x^m = \cos m \varphi + \sqrt{-1} \sin m \varphi,$$

$$x^{-n} = \cos n \varphi - \sqrt{-1} \sin n \varphi,$$

et, par suite,

$$8 = A.2\pi, \quad \text{d'où} \quad A = \frac{4}{\pi}.$$

On a une autre démonstration en multipliant l'équation

$$1 - \sqrt{1 - z^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{2} z^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} z^4 \sin^4 \varphi \\ + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} z^6 \sin^6 \varphi + \dots$$

par $\frac{dz d\varphi}{z^2}$ et intégrant entre les limites $z = 0$, $z = 1$,

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{1}{2}\pi.$$

Je remarquerai encore que Gauss a aussi transformé la série $F(\alpha, \beta, \gamma)$ en fraction continue, et en un produit d'une infinité de facteurs, mais qu'il n'est pas l'inventeur de la décomposition de l'intégrale eulérienne $B(p, q)$ en un nombre infini de facteurs : cette décomposition est due à Euler lui-même dont les formules et les méthodes sont rapportées par Lacroix dans le III volume de son grand Traité.
