

GERONO

De quelques questions d'analyse indéterminée

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 153-158

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__153_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE QUELQUES QUESTIONS D'ANALYSE INDÉTERMINÉE.

(Fin d'un premier article, voir p. 122.)

II. Nous supposons maintenant que deux nombres Q et Q' , entiers et positifs, vérifient l'équation $x^2 - ny^2 = 1$; ainsi, par hypothèse, on a l'égalité numérique

$$Q^2 - n \cdot Q'^2 = 1.$$

Il s'agit de démontrer que l'expression fractionnaire $\frac{Q}{Q'}$ est nécessairement une réduite de rang pair de la fraction continue périodique qui représente la valeur de $\sqrt{n}$, et, qu'en outre, cette réduite correspond à l'avant-dernier quotient incomplet de l'une des périodes de la fraction continue.

Je considère, d'abord, le cas particulier où $Q' = 1$.

Dans ce cas, l'égalité supposée $Q^2 - n Q'^2 = 1$, devient $Q^2 - n = 1$, et donne $\sqrt{n} = \sqrt{Q^2 - 1}$.

Mais, en réduisant $\sqrt{Q^2-1}$ en fraction continue, on obtient

$$\sqrt{Q^2-1} = (Q-1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{2(Q-1) + \frac{1}{1 + \frac{1}{2(Q-1) + \text{etc.}}}}}$$

On voit donc que $\frac{Q}{Q'}$, ou $\frac{Q}{1}$, est précisément la seconde réduite $(Q-1) + \frac{1}{1}$, de la fraction continue périodique qui représente la valeur de $\sqrt{n}$, et que cette réduite correspond à l'avant-dernier quotient incomplet d'une période, qui est ici la première.

En second lieu je suppose $Q' > 1$.

Les nombres Q et Q' sont premiers entre eux, la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est irréductible, c'est ce qui résulte de l'égalité $Q^2 - nQ'^2 = 1$.

De plus, si l'on désigne par α le premier quotient incomplet de la réduction de $\sqrt{n}$ en fraction continue, α sera aussi le premier quotient incomplet de la fraction continue égale à $\frac{Q}{Q'}$. Car la relation $Q^2 - nQ'^2 = 1$ donne

$\frac{Q}{Q'} = \sqrt{n + \frac{1}{Q'^2}}$, et il est clair que si $\sqrt{n}$ est compris entre les deux nombres entiers consécutifs α , $\alpha + 1$, il en sera de même de $\sqrt{n + \frac{1}{Q'^2}}$.

Ainsi, en convertissant, par la règle ordinaire l'expression commensurable $\frac{Q}{Q'}$ en fraction continue, on aura une

égalité de la forme

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\alpha + \frac{1}{a + \frac{1}{p + \frac{1}{q}}} \right);$$

et le dénominateur q , de la dernière fraction intégrante $\frac{1}{q}$, sera plus grand que l'unité.

Si le nombre des quotients $\alpha, a, \dots, p, q$, est impair, en remplaçant $\frac{1}{q}$ par $\frac{1}{(q-1) + \frac{1}{1}}$, il viendra

$$\frac{Q}{Q'} = \left(\alpha + \frac{1}{a + \frac{1}{p + \frac{1}{(q-1) + \frac{1}{1}}}} \right);$$

on peut donc, dans tous les cas, considérer les deux nombres Q et Q' comme les deux termes d'une réduite de rang pair, provenant d'une fraction continue

$$(1) \quad \alpha + \frac{1}{a + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \text{etc.}}}}$$

dont le premier quotient incomplet est α , le dénominateur q de la dernière fraction intégrante $\frac{1}{q}$ de cette réduite pouvant, d'ailleurs, être égal à l'unité.

Cela posé, je désigne par $\frac{P}{P'}$ la réduite de rang im-

pair qui se termine au quotient incomplet p précédant q dans la fraction continue (1). Il s'ensuit

$$PQ' - PQ = +1 \quad \text{et} \quad P' < Q', \quad P < Q :$$

de sorte que P' et P sont deux nombres entiers positifs moindres que Q' et Q et qui vérifient l'équation indéterminée du premier degré

$$Qz - Q'z' = +1.$$

Cette dernière équation admet aussi la solution entière

$$z = Q - \alpha Q', \quad z' = nQ' - \alpha Q,$$

car la substitution de ces valeurs de z et z' donne

$$\begin{aligned} Qz - Q'z' &= Q(Q - \alpha Q') - Q'(nQ' - \alpha Q) \\ &= Q^2 - nQ'^2 = +1. \end{aligned}$$

De plus, le nombre $Q - \alpha Q'$ est positif et moindre que Q' puisque la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est comprise entre α et $\alpha + 1$.

De même le nombre $nQ' - \alpha Q$ est positif et moindre que Q . Cela résulte simplement de ce que l'équation

$$Qz - Q'z' = +1$$

revient à

$$z' = \frac{Qz - 1}{Q'};$$

on voit qu'à une valeur entière de z positive moindre que Q' correspond une valeur de z' positive et plus petite que le nombre Q .

Or, on sait que l'équation indéterminée

$$Qz - Q'z' = +1$$

ne peut admettre qu'une seule solution entière positive, dans laquelle les valeurs des inconnues z et z' soient res-

pectivement plus petites que les coefficients Q' et Q ; on a donc

$$(2) \quad P' = Q - \alpha Q',$$

$$(3) \quad P = nQ' - \alpha Q.$$

Ces égalités établies, posons l'équation

$$(4) \quad \sqrt{n} = \alpha + \frac{1}{a + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{\alpha + x}}}}$$

d'où

$$\sqrt{n} = \frac{Q(\alpha + x) + P}{Q'(\alpha + x) + P'} = \frac{Q\alpha + P + Qx}{Q'\alpha + P' + Q'x}.$$

En ayant égard aux égalités (2) et (3), cette dernière équation se réduit à

$$\sqrt{n} = \frac{nQ' + Qx}{Q + Q'x}.$$

On en tire

$$x = \frac{Q\sqrt{n} - nQ'}{Q - Q'\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} \cdot (Q - Q'\sqrt{n})}{Q - Q'\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Par suite l'équation (4) donne

$$\sqrt{n} = \alpha + \frac{1}{a + \frac{1}{p + \frac{1}{q + \frac{1}{2\alpha + \frac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$$

résultat qui montre qu'effectivement la fraction $\frac{Q}{Q'}$ est

(158)

une réduite correspondante à l'avant-dernier quotient incomplet d'une période de la fraction continue dont la valeur est $\sqrt{n}$. C'est ce qu'il fallait démontrer. G.