

H. LEMONNIER

Note sur les questions 453 et 458

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18 (1859), p. 150-153

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__150_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

NOTE SUR LES QUESTIONS 453 ET 458;

PAR M. H. LEMONNIER,

Professeur de mathématiques spéciales au lycée de Nantes.

Fx étant une fonction continue dans l'intervalle de x_0 à X , dont la dérivée $F'x$ soit également continue et de plus constamment croissante ou décroissante dans cet intervalle, on sait que si $X - x_0$ se partage en n parties égales $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = X - x_{n-1} = h$, l'accroissement $FX - Fx_0$ est compris entre les deux sommes

$$h (F'x_0 + F'x_1 + \dots + F'x_{n-1})$$

et

$$h (F'x_1 + F'x_2 + \dots + F'x_n).$$

Cela posé :

1. Soit

$$Fx = l(1 + x),$$

d'où

$$F'x = \frac{l}{1+x};$$

faisons croître x de 0 jusqu'à n en prenant $L = 1$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} l(1+n) &> \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + \frac{l}{4} + \dots + \frac{l}{n+1} \\ &< \frac{l}{1} + \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + \dots + \frac{l}{n}. \end{aligned}$$

De là

$$ln > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$1 + ln > \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Donc

$$l(1+n) < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + ln.$$

(Quest. 453, p. 68.)

2. Si on fait pour la même fonction $x_0 = n - 1$ et $X = N - 1$, on aura de même

$$\begin{aligned} lN - ln &= l\frac{N}{2} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{N} \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{N-1}, \end{aligned}$$

d'où, en prenant $N = 2n$,

$$\begin{aligned} l2 &> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \\ &< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1}. \end{aligned}$$

(Quest. 458, p. 66.)

La différence des deux limites est

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n};$$

en conséquence, si n croît indéfiniment, l'expression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

a pour limite $l2$.

Qu'on prenne

$$N + np,$$

on aura

$$lp > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{np}$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{np-1},$$

et p restant fixe, si n croît indéfiniment, lp est la limite de l'expression

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{np}.$$

3. Soit

$$F x = - \frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}},$$

d'où

$$F' x = \frac{1}{(x-1)^p};$$

faisons croître x indéfiniment à partir d'une première valeur $x > 1$, et soit $h = 1$. La même considération donne

$$\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}} > \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \dots$$

$$< \frac{1}{(x-1)^p} + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \dots$$

de sorte que

$$\frac{1}{(p-1)x^{p-1}} < \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \dots;$$

done

$$\frac{1}{(p-1)(x-1)^{p-1}} > \frac{1}{(p-1)^{p-1}} + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \dots$$

On en conclut, au cas de $p > 1$, la convergence de la

série

$$\frac{1}{x^p} + \frac{1}{(x+1)^p} + \frac{1}{(x+2)^p} + \dots$$

et en particulier de la série

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{2}{4^p} + \dots$$

Ajoutons que si cette dernière série est poussée jusqu'au terme $\frac{1}{n^p}$ inclusivement, le reste $R = \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \dots$ se trouve compris entre $\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1}}$ et $\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$.
