

Théorèmes généraux segmentaires, courbes planes et surfaces

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 18
(1859), p. 111-116

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1859_1_18__111_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1859, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉOREMES GÉNÉRAUX SEGMENTAIRES, COURBES PLANES ET SURFACES.

1. Soit

$$N = 0$$

l'équation d'une ligne plane de degré n ; par un point A situé dans le plan de la courbe menons deux transversales.

Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$$

les angles formant les n asymptotes (réels ou imaginaires) de la courbe avec la première transversale, et

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$$

les angles que forment ces asymptotes avec la seconde transversale

$$p_1, p_2, \dots, p_n$$

les n distances au point A des points d'intersection de la première transversale avec la courbe,

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

les n distances au point A des points d'intersection de la

deuxième transversale, on a

$$\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \dots \sin \alpha_n}{\sin \beta_1 \sin \beta_2 \dots \sin \beta_n} = \frac{p_1 p_2 \dots p_n}{q_1 q_2 \dots q_n}.$$

Démonstration. Prenons les deux transversales pour axes des x et des y ; les deux membres de l'équation sont exprimés chacun par le même quotient $\frac{C}{A}$, A étant le coefficient de la plus haute puissance de y et C le coefficient de la plus haute puissance de x .

Corollaire. Si dans deux courbes planes de degrés quelconques, rapportées aux mêmes axes, le quotient $\frac{C}{A}$ est le même, le membre à droite de l'équation est le même dans les deux, ce qui donne une relation segmentaire.

Observation. Tant que les transversales ne changent pas de direction l'équation subsiste; c'est le théorème segmentaire de Newton que Carnot a étendu à des transversales formant un polygone.

2. En faisant

$$y = 0$$

dans l'équation

$$N = 0,$$

on a évidemment

$$f x = C (x - p_1) (x - p_2) (x - p_3) \dots (x - p_n),$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ sont les points racines de Gauss.

Si l'on prend sur l'axe des x , à partir de l'origine, un point B tel que $AB = r$, on a

$$f(r) = C (r - p_1) (r - p_2) \dots (r - p_n),$$

$r - p_1, r - p_2, \dots$, sont les distances points-racines au point B .

3. Soient données un nombre *quelconque* de courbes algébriques de degré *quelconque* situées dans le même plan. Pour fixer les idées, nous ne prendrons que quatre courbes données par les équations en x, y :

$$P = 0,$$

$$Q = 0,$$

$$R = 0,$$

$$S = 0,$$

de degrés respectifs n_1, n_2, n_3, n_4 , où n_1 est le nombre le plus grand; formons cette cinquième courbe qui sera aussi de degré n_1 :

$$\lambda_1 P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = 0;$$

les λ sont des constantes arbitraires. Désignons par p, q, r, s ce que deviennent P, Q, R, S en posant $y = 0$, alors la même supposition donne

$$\lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r + \lambda_4 s = 0 \quad (1),$$

p, q, r, s sont des fonctions de x seulement.

Désignons par p_i, q_i, r_i, s_i ce que deviennent p, q, r, s en prenant $x = t$; soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ quatre *points-racines* de l'équation (1), on a

$$\lambda_1 p_\alpha + \lambda_2 q_\alpha + \lambda_3 r_\alpha + \lambda_4 s_\alpha = 0,$$

$$\lambda_1 p_\beta + \lambda_2 q_\beta + \lambda_3 r_\beta + \lambda_4 s_\beta = 0,$$

$$\lambda_1 p_\gamma + \lambda_2 q_\gamma + \lambda_3 r_\gamma + \lambda_4 s_\gamma = 0,$$

$$\lambda_1 p_\delta + \lambda_2 q_\delta + \lambda_3 r_\delta + \lambda_4 s_\delta = 0.$$

Éliminant les λ on a la relation

$$\text{Déterminant} \left\{ \begin{array}{cccc} p_\alpha, & q_\alpha, & r_\alpha, & s_\alpha \\ p_\beta, & q_\beta, & r_\beta, & s_\beta \\ p_\gamma, & q_\gamma, & r_\gamma, & s_\gamma \\ p_\delta, & q_\delta, & r_\delta, & s_\delta \end{array} \right\} = 0.$$

Or tous ces termes sont des *produits segmentaires* dans les courbes P, Q, R, S (voir p. 112).

On a donc ici une relation segmentaire *générale* indépendante des λ et s'appliquant à toutes les cinquièmes courbes formées par *voie d'addition*.

Les quatre valeurs $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont susceptibles de six combinaisons binaires; on a ainsi *six* de ces *relations segmentaires*, lesquelles ayant quelques segments communs, fournissent d'autres relations où le nombre des segments est diminué.

Les n_i donnent $\frac{n_i(n_i-1)(n_i-2)(n_i-3)}{1.2.3.4}$ combinaisons; on a donc généralement parlant $\frac{n_i(n_i-1)(n_i-2)(n_i-3)}{4}$ relations segmentaires.

Remarque. Quatre quelconque de ces cinq équations des courbes étant données, la cinquième s'en déduit par *voie d'addition*. Soit

$$\lambda P + \lambda_2 Q + \lambda_3 R + \lambda_4 S = T = 0,$$

on déduit

$$P = \frac{T}{\lambda} - \frac{\lambda_2}{\lambda} Q - \frac{\lambda_3}{\lambda} R - \frac{\lambda_4}{\lambda} S.$$

4. En prenant seulement deux courbes $P=0$, $Q=0$, ces courbes et la troisième qui en dérive passent par les mêmes $n_1 n_2$ points.

Si

$$n_1 = n_2 = 2,$$

on a trois coniques, et la relation segmentaire est connue sous le nom d'*involution*. Desargues l'a énoncée le premier pour les trois couples de droites du quadrilatère complet; Sturm l'a étendue aux coniques.

5. Prenant un point fixe dans le plan des cinq courbes,

les équations des polaires de quantième quelconque, relativement à ces cinq courbes, ont la même dépendance que les équations des courbes, c'est-à-dire que l'une quelconque peut être formée par voie d'addition au moyen des quatre autres; donc le théorème segmentaire s'applique à ces polaires.

6. $\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy} = 0$ est la courbe de degré $n_1 - 1$ renfermant les $(n_1 - 1)^2$ pôles de la droite située à l'infini. On voit que les cinq courbes qu'on forme ainsi jouissent encore de la propriété segmentaire.

7. Soient

$$P = A y^{n_1} + \dots + F_1,$$

$$Q = A y^{n_2} + \dots + F_2,$$

$$R = A y^{n_3} + \dots + F_3,$$

$$S = A y^{n_4} + \dots + F_4,$$

désignant par T la cinquième courbe variable, on a

$$T = A y^{n_5} + \dots + F_5,$$

d'où (p. 113)

$$F_5 = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 + \lambda_4 F_4.$$

Si

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4,$$

alors

$$F_5 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) F_1.$$

Si l'on prend

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1;$$

on a aussi

$$F_5 = F_1.$$

Alors le produit des distances à l'origine des points-racines situés sur l'axe des y est le même dans toutes ces courbes. Lorsqu'il n'y a que deux courbes P et Q, on peut

toujours choisir sur l'axe des y une origine telle que F_2 devient égale à F_1 . Lorsque les deux courbes sont des coniques, cette origine porte le nom de *centre d'involution*.

8. P, Q, R, S pouvant représenter des surfaces, on vient à des conclusions analogues.

Note. Nous ne possédons qu'une géométrie *étriquée*; quand aurons-nous une géométrie finitésimale, infinitésimale, embrassant toute l'étendue? C'est la tâche et même le besoin de l'avenir: car la besogne s'allonge et nullement la vie; les divers genres d'ambitions, forces motrices intérieures et extérieures de la société actuelle, laissent peu de place à la vie méditative et même aux soins de la vie physique. La limite assignée par M. Flourens restera encore longtemps parmi les *pia desideria*. Cependant cette limite a probablement existé dans les temps primitifs; elle est assignée de Dieu, cent vingt ans (Genèse, V, 3).
