VANNSON

Formules fondamentales de l'analyse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 99-108

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__99_0>

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE SPHÉRIQUE

(voir page 65);

PAR M. VANNSON.

THÉORÈME. *Étant donnés un triangle sphérique* ABC *et un point* O *sur la surface d'une sphère, si de ce point comme pôle on décrit une circonférence de grand cercle, qu'on joigne le point* O, *pris pour origine des coordonnées, au sommet* A *par un arc qu'on prolongera jusqu'à sa rencontre en* A' *avec la circonférence, si ensuite on joint* A' *avec le centre sphérique des deux autres sommets et qu'on répète la même opération trois fois en changeant de sommets, les trois circonférences ainsi obtenues auront un point commun.*

On peut généraliser le théorème en l'appliquant à un système de $(n+1)$ points, comme nous allons le faire voir.

Soient x', y' les tangentes des coordonnées du point A, l'équation de l'arc OA sera

$$y = \frac{y'}{x'} x;$$

toute circonférence passant par le point A' aura pour coefficient de x, $\frac{y'}{x'}$. Donc la circonférence qui joint le point A' au centre sphérique des n autres points sera représentée par l'équation

$$y - Y_0 = \frac{y'}{x'}(x - X_0);$$

mais on a trouvé dans le problème précédent

$$Y_0 = \frac{Y'(n+1) - y'}{n}, \quad X_0 = \frac{X'(n+1) - x'}{n},$$

valeurs qui étant portées dans l'équation précédente donnent

$$y - \frac{Y'(n+1)}{n} = \frac{y'}{x'}\left(x - \frac{X'(n+1)}{n}\right).$$

On voit donc que cette circonférence et toutes les analogues pour les autres points passent par un point commun ayant pour tangente de ses coordonnées

$$y = \frac{Y'(n+1)}{n}, \quad x = \frac{X'(n+1)}{n},$$

d'où

$$\frac{y}{x} = \frac{Y'}{X'}.$$

Ce point se trouve donc sur la circonférence qui passe par le point O et le centre sphérique C des moyennes distances du système. On voit aussi que ce point partage l'arc OC suivant le rapport sphérique de $n+1$ à -1.

Le théorème analogue sur un plan se démontre par un calcul identique et peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un système de (n + 1) *points et un autre point* O, *si l'on joint chaque point du système au point* O, *et si l'on mène à chacune des droites ainsi obtenues une parallèle par le centre des moyennes distances des autres points, toutes les parallèles se couperont en un même point qui sera situé sur la droite menée du point* O *au centre des moyennes distances de tout le système et qui partagera cette droite dans le rapport de* n + 1 *à* — 1, *c'est-à-dire qu'il sera sur le prolongement au delà du centre et que ses distances à* C *et à* O *seront comme* 1 *est à* n + 1.

Dans le cas particulier d'un triangle, les parallèles sont menées par les milieux des côtés, et le théorème se démontre très-simplement par la géométrie. Le même théorème s'applique aussi à un système de points dans l'espace et se démontre de la même manière que sur la sphère.

Si les points du système se déplacent sans que leur centre de moyennes distances change de position, le point de rencontre des lignes parallèles sur un plan ou des arcs de grands cercles sur la sphère ne changera pas. De là résulte une propriété des polygones réguliers inscrits dans un cercle de centre fixe et de rayon variable. Elle aurait lieu également pour un polyèdre régulier inscrit dans une sphère avec les mêmes conditions.

Problème. *Étant donné un triangle* ABC, *si d'un point que nous supposerons sur le côté* CB *à une distance* α *du point* C *on mène un arc sécant qui rencontre* AB *en* C′ *et* AC *en* B′, *qu'on joigne* B, B′ *et* C, C′, *on demande le lieu du point de rencontre de ces arcs.*

Prenons C pour origine, CB et CA pour axes, et désignons CB par α', CA par β' et la variable CB′ par β.

Cela posé, l'équation de l'arc DB′ sera

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1,$$

celle de l'arc AB sera

$$\frac{y}{\beta'}+\frac{x}{\alpha'}=1.$$

Leur intersection aura pour équations

$$y=\frac{\beta\beta'(\alpha-\alpha')}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\quad x=\frac{\alpha\alpha'(\beta'-\beta)}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}.$$

L'arc CC′ aura donc pour équation

$$\frac{y}{x}=\frac{\beta\beta'(\alpha-\alpha')}{\alpha\alpha'(\beta'-\beta)};$$

pour l'arc AB, c'est

$$\frac{y}{\beta}+\frac{x}{\alpha}=1.$$

Eliminant β entre ces équations, on trouvera

$$\alpha\alpha' y + \beta' (2\alpha - \alpha') x = \alpha\alpha' \beta';$$

c'est donc un grand cercle qui passe au sommet C du triangle et qui coupe CB en un point (E) pour lequel

$$x = \frac{\alpha\alpha'}{2\alpha - \alpha'}.$$

On tire de cette relation

$$(\alpha - \alpha') x = \alpha (\alpha' - x),$$

et, remplaçant ces lettres par des tangentes, on trouve

$$\sin CD \times \sin EB = \sin BD . \sin CE.$$

Ce qui prouve que les quatre points C, E, B, D sont harmoniques, et, par suite, que le lieu demandé est le quatrième arc d'un faisceau harmonique dont les trois autres sont AC, AB, AD, l'arc cherché étant conjugué de AD.

Cas particuliers. Si nous supposons

$$\alpha = \text{tang}\, 90^\circ = \infty,$$

nous aurons

$$x = \frac{\alpha'}{2}$$

ou

$$\text{tang}\, CE = \frac{1}{2} \text{tang}\, CB.$$

Si nous supposons en même temps

$$C = 90^\circ,$$

nous aurons aussi

$$\text{tang}\, CO = \frac{1}{2} \text{tang}\, OC',$$

O étant un point du lieu et C' la rencontre de l'arc CO avec AB.

De là résulte d'abord un moyen graphique de résoudre cette question : Étant donné un certain nombre d'arcs α, α', α'', trouver pour chacun d'eux un arc x tel, qu'on ait

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha.$$

On peut en déduire aussi cette conséquence : Étant donnés un point C et une circonférence de grand cercle AB, si du point on mène un arc CC′ coupant la circonférence donnée en C′, si l'on prend sur cet arc un point O tel, qu'on ait

$$\operatorname{tang} CO = \frac{1}{2} \operatorname{tang} CC',$$

le lieu du point O sera une circonférence de grand cercle perpendiculaire à l'arc qui projette le point C sur la circonférence donnée. Si, au lieu de mener l'arc OC′ sécant à une circonférence, on le mène sécant à une courbe quelconque, le lieu du point O obtenu de même sera une autre courbe de même degré que la première et à laquelle il sera facile de mener une tangente en un point donné, ayant une fois tracé la tangente au point homologue de la courbe donnée. Il suffira, d'après ce qui précède, de projeter le point C sur cette tangente par un arc perpendiculaire CP, de prendre à partir de P sur l'arc tangent une distance PM de 90 degrés, et de joindre le point P au point C′ de la seconde courbe.

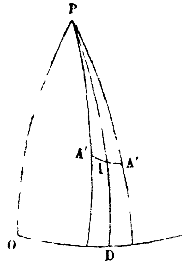
Si le point D par lequel on mène les arcs sécants au triangle ACB était pris à 90 degrés du milieu de la base CB, le lieu des intersections des diagonales du quadrilatère CBB′ C′ serait l'arc qui joint le sommet A au milieu de la base.

Théorème. *Étant donné un point* O *à* 90 *degrés du sommet d'un angle* A, *si de ce point* O *on mène deux* *arcs sécants* Omn, Om′n′, *les tangentes des quatre segments à partir de* A *sur les côtés sont en proportion.*

Ce qui peut servir à résoudre graphiquement les deux questions : 1° construire une tangente quatrième proportionnelle à trois autres ; 2° mener par un point O un arc qui détermine sur les côtés deux segments dont les tangentes soient dans un rapport donné.

PROBLÈME. *Connaissant les coordonnées géographiques de deux points, trouver les coordonnées du milieu de l'arc qui les joint.*

FIG. 1



Soient x', x'' les deux longitudes, y' et y'' les latitudes, I le milieu de l'arc A′, A″ ; appliquant le principe des sinus proportionnels aux deux triangles PA′I, PA″I dont les angles en P ont pour mesure $X - x'$ et $x'' - X$, nous aurons

$$\frac{\cos y'}{\sin \mathrm{I}} = \frac{\sin \mathrm{A'I}}{\sin (X - x')}$$

et

$$\frac{\cos y''}{\sin \mathrm{I}} = \frac{\sin \mathrm{A''I}}{\sin (x'' - X)};$$

divisant membre à membre, on trouve

$$\cos y'' \sin (x'' - X) = \cos y' . \sin (X - x'),$$

d'où l'on tire

$$\tang X = \frac{\sin x' \cos y' + \sin x'' \cos y''}{\cos x' \cos y' + \cos x'' \cos y''}.$$

Si nous supposons les deux points à égale distance de l'origine, nous aurons

$$\cos x' \cos y' = \cos x'' \cos y'',$$

et en divisant le premier terme du numérateur par $\cos x' \cos y'$ et le deuxième par $\cos x'' \cos y''$, nous aurons

$$\tang X = \frac{\tang x' + \tang x''}{2}$$

ou plus simplement

$$X = \frac{x' + x''}{2},$$

ces trois lettres représentant des tangentes. Nous aurons de même

$$Y = \frac{Y' + Y''}{2},$$

ces trois lettres représentant, non plus les tangentes des latitudes, mais des ordonnées prises sur l'axe des y. On voit par là que le point que nous avions appelé centre des moyennes distances de deux points n'est autre chose que le milieu de l'arc qui les joint, mais seulement quand ces deux points sont équidistants de l'origine.

Corollaire I. Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant son pôle à l'origine et qu'on trace les trois médianes, on trouvera, pour déterminer leur point de rencontre, les équations

$$X = \frac{X' + X'' + X'''}{3}, \quad Y = \frac{y' + y'' + y'''}{3},$$

expressions déjà trouvées et qui déterminent le centre sphérique des moyennes distances pour les trois sommets.

Ainsi le centre sphérique des moyennes distances des trois sommets d'un triangle n'est autre chose que la rencontre des trois médianes, mais seulement quand les trois sommets sont équidistants de l'origine.

Corollaire II. Si un quadrilatère est inscrit dans un cercle, les arcs qui joignent les milieux des côtés opposés et celui qui joint les milieux des diagonales concourent au même point, et si l'on prend le pôle du cercle comme origine, les coordonnées du point de rencontre seront données par les formules

$$X = \frac{\Sigma x'}{4}, \quad Y = \frac{\Sigma y'}{4}.$$

Problème. *Étant données les coordonnées géographiques de deux points* $(x'y', x''y'')$, *si l'on partage l'arc qui les joint en deux segments dont les sinus sont comme* m *est à* n, *on trouvera pour la longitude du point de division, en opérant comme dans le problème précédent*

$$X = \frac{n \sin x' \cos y' + m \sin x'' \cos y''}{n \cos x' \cos y' + m \cos x'' \cos y''}.$$

Si les deux points sont équidistants de l'origine, il vient

$$X = \frac{nx' + mx''}{m + n},$$

de même

$$Y = \frac{nY' + mY''}{m + n},$$

ainsi l'arc est partagé suivant le rapport sphérique de m à n.

Si l'on circonscrit un cercle à un triangle et qu'on prenne le pôle de ce cercle pour origine, on reconnaîtra facilement, d'après ce qui précède, que les coordonnées du point où les bissectrices se rencontrent sont données par les formules

$$X = \frac{x' \sin a + x'' \sin b + x''' \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c},$$

$$Y = \frac{y' \sin a + y'' \sin b + y''' \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c}.$$

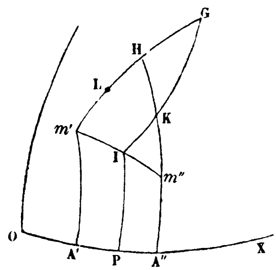
Corollaire. Les résultats précédents donnent le moyen de construire un arc X sachant qu'on a

$$\operatorname{tang} X = \frac{m \operatorname{tang} x' + n \operatorname{tang} x''}{m + n}.$$

Nous supposons que m et n sont des sinus.

Soient pris, sur l'axe OX, $OA' = x'$, $OA'' = x''$, de O comme pôle décrivons un cercle $m'm''$, prenons m''K égal

FIG. 2.



à l'arc dont le sinus est m et KH égal à l'arc dont le sinus est n, joignez m' et H; à partir de L, milieu de M' H, prenez $LG = \frac{\pi}{2}$; joignez G à K par un arc qu'on prolongera jusqu'en I; on aura évidemment

$$\frac{\sin m'' I}{\sin m' I} = \frac{m}{n}.$$

Si donc on projette I sur OX par l'arc IP, on aura

$$\operatorname{tang} OP = \frac{m \operatorname{tang} x' + n \operatorname{tang} x''}{m + n}.$$

Si l'on avait $m = n$, l'expression à construire serait

$$\operatorname{tang} X = \frac{\operatorname{tang} x' + \operatorname{tang} x''}{2};$$

il suffirait de projeter le point milieu de $m' m''$ sur OX. On construirait d'une manière analogue un arc X donné par l'équation

$$\operatorname{tang} X = \frac{\operatorname{tang} x' + \operatorname{tang} x'' + \operatorname{tang} x'''}{3}.$$

La suite prochainement.