MARIUS LAQUIÈRE
GEORGES FENÉON

Solution de la question 393 (Catalan)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 5-6
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SOLUTION DE LA QUESTION 393 (CATALAN)

(voir t. XVI, p. 312);

PAR MM. MARIUS LAQUIÈRE ET GEORGES FENÉON,
Élèves du lycée Saint-Louis.

Je transporte les axes parallèlement à eux-mêmes à l'extrémité A de l'ordonnée y_0. Les équations des deux courbes seront

$$y = mx + nx^2 + px^3,$$
$$y = Mx + Nx^2.$$

L'aire comprise entre l'axe des x, une ordonnée quelconque, et la courbe, sera : pour la parabole cubique

$$(1) \qquad T = x^2\left(\frac{m}{2} + \frac{nx}{3} + p\frac{x^2}{4}\right),$$

et pour la parabole du deuxième ordre

$$(2) \qquad t = x^2\left(\frac{M}{2} + \frac{Nx}{3}\right).$$

Or, les deux courbes passant par les trois points A, C, E, l'on a

$$y_1 - y_0 = \delta(m + n\delta + p\delta^2) = \delta(M + N\delta)$$

et

$$y_2 - y_1 = 2\delta(m + 2n\delta + 4p\delta^2) = 2\delta(M + 2N\delta),$$

d'où

$$M = m - 2p\delta^2, \qquad N = n + 3p\delta.$$

L'expression (2) devient alors

$$(3) \qquad x^2\left(\frac{m}{2} - p\delta^2 + \frac{n+3p\delta}{3}x\right).$$

Faisant $x = 2\delta$, les expressions (1) et (3) des deux aires deviennent égales à

$$4\delta^2\left(\frac{m}{2} + \frac{2}{3}n\delta + p\delta^2\right).$$

Ainsi les aires des deux triangles curvilignes terminés aux paraboles du deuxième et troisième ordre et à l'axe des x et à l'ordonnée y_2 sont équivalentes.

Il en résulte évidemment que les surfaces curvilignes BCA, CDEC, sont équivalentes.

Or l'on sait que la surface d'un trapèze parabolique compris entre deux ordonnées y_0 et y_2 a pour expression

$$\frac{1}{3}\delta(y_0 + y_2 + 4y_1),$$

y_1 étant l'ordonnée également distante de y_0 et y_2.

Elle donne donc exactement aussi l'aire comprise entre les mêmes limites pour la parabole cubique.

Il en résulte, en outre, que la formule de Thomas Simpson est rigoureusement applicable à la parabole cubique dont elle décompose l'aire en trapèzes qu'elle évalue exactement.