PEPIN

Solution de quelques questions proposées par M. Strebor

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 55-63
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__55_1>

SOLUTION DE QUELQUES QUESTIONS
Proposées par M. Strebor

(voir t. IX, p. 182);

PAR LE P. PEPIN, S. J.

1°. Soient deux paraboles ayant même foyer et s'entrecoupant orthogonalement, qui touchent respectivement deux ellipses homofocales données, dont un des foyers coïncide avec celui des paraboles. Les points d'intersection de toutes les paires de paraboles qui satisfont à cette condition seront situées sur une circonférence de cercle, ayant pour centre le foyer commun des paraboles.

De plus le rayon de ce cercle sera la demi-somme des grands axes des deux ellipses données.

Soient

$$\rho = \frac{\varpi}{1 + e \cos\theta}, \quad \rho = \frac{\varpi'}{1 + e' \cos\theta},$$

les équations en coordonnées polaires ρ, θ, des deux ellipses données, le pôle étant situé au foyer commun des ellipses et des paraboles.

Soient α et α' les angles que font avec l'axe polaire les axes des deux paraboles, et θ l'angle polaire, les équations de ces deux paraboles seront

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \alpha)}, \quad \rho = \frac{p'}{1 + \cos(\theta - \alpha')}.$$

Les points d'intersection des deux paraboles correspondent aux angles polaires qui satisfont à l'équation

$$(a) \qquad \frac{p}{1 + \cos(\theta - \alpha)} = \frac{p'}{1 + \cos(\theta - \alpha')}.$$

D'ailleurs on doit avoir

$$\alpha' = \pi + \alpha;$$

en effet, appelons μ et μ' les angles que font avec l'axe polaire les tangentes menées respectivement aux deux paraboles, par leur point d'intersection. L'angle formé par la tangente avec l'axe de la parabole est la moitié de l'angle formé par le rayon vecteur du point de contact avec le même axe; on a donc

$$\mu = \frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha), \quad \mu' = \frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha').$$

Or, pour que les deux tangentes soient perpendiculaires l'une à l'autre, on doit avoir

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \mu' ;$$

on a donc

$$\frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha') = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\pi - \theta + \alpha),$$

d'où

$$\alpha' = \pi + \alpha.$$

Dès lors l'équation (a) donnera

$$\cos(\theta - \alpha) = \frac{p - p'}{p + p'};$$

le rayon vecteur des points d'intersection des deux paraboles sera donc

$$(b) \qquad \rho = \frac{1}{2}(p + p');$$

pour démontrer le théorème énoncé, il suffira donc de démontrer que la somme des deux paramètres variables p, p', est égale à la somme des grands axes des deux ellipses.

La tangente trigonométrique de l'angle formé avec le rayon vecteur par la tangente à l'ellipse $\rho = \frac{\varpi}{1 + e\cos\theta}$ est

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1 + e\cos\theta}{e\sin\theta};$$

relativement à la parabole $\rho = \frac{p}{1\cos(\theta - \alpha)}$, cette tangente est

$$\rho\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1 + \cos(\theta - \alpha)}{\sin(\theta - \alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\theta - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta - \alpha)}.$$

Puisque la parabole doit être tangente à l'ellipse, en dési- gnant par θ' l'angle polaire correspondant au point de contact, on aura

$$(c)\quad\begin{cases} p=\dfrac{\varpi[1+\cos(\theta'-\alpha)]}{1+e\cos\theta'},\\[2ex] \dfrac{1+e\cos\theta'}{e\sin\theta'}=\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)}.\end{cases}$$

En appelant θ'' l'angle polaire qui répond au point de contact de la seconde ellipse et de la seconde parabole, on aura semblablement

$$(d)\quad\begin{cases} p'=\dfrac{\varpi'[1-\cos(\theta''-\alpha)]}{1+e'\cos\theta''},\\[2ex] \dfrac{1+e'\cos\theta''}{e'\sin\theta''}=-\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\theta''-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\theta''-\alpha)}.\end{cases}$$

Les deux équations (c) donnent

$$1+e\cos\theta'=\frac{e\sin\theta'.\cos\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)},$$

$$p=\frac{\varpi.2\cos^2\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)\sin\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)}{e\sin\theta'.\cos\frac{1}{2}(\theta'-\alpha)}=\frac{\varpi\sin(\theta'-\alpha)}{e\sin\theta'}$$

Les équations (d) donnent de même

$$1+e'\cos\theta''=-\frac{e'\cos\theta''\sin\frac{1}{2}(\theta''-\alpha)}{\cos\frac{1}{2}(\theta''-\alpha)},$$

et

$$p' = -\frac{\varpi'.\sin(\theta''-\alpha)}{e'\sin\theta''},$$

on a donc

$$(e) \qquad p+p' = \frac{\varpi.\sin(\theta'-\alpha)}{e\sin\theta'} - \frac{\varpi.\sin(\theta''-\alpha)}{e'\sin\theta''}.$$

Or la dernière des équations (c) donne

$$\begin{aligned} 0 &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta'-\alpha) \\ &\quad - e\left[\sin\theta'.\cos\tfrac{1}{2}(\theta'-\alpha) - \cos\theta'\ \sin\tfrac{1}{2}(\theta'-\alpha)\right] \\ &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta'-\alpha) - e\sin\tfrac{1}{2}(\theta'+\alpha). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta'.\cos\tfrac{1}{2}\alpha(1-e) - \cos\tfrac{1}{2}\theta'\sin\tfrac{1}{2}\alpha(1+e) = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\theta' = \frac{1+e}{1-e}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{(1-e^2)\sin\alpha}{(1+e^2)\cos\alpha - 2e}.$$

On aura donc

$$\frac{\sin(\theta'-\alpha)}{\sin\theta'} = \cos\alpha - \sin\alpha.\cos.\theta' = \frac{2(e-e^2\cos\alpha)}{1-e^2}.$$

De même la seconde des équations (d) donne

$$-\frac{\sin(\theta''-\alpha)}{\sin\theta''} = \frac{2(e'+e'^2\cos\alpha)}{1-e'^2};$$

en substituant dans l'équation (e) on obtiendra

$$\begin{aligned} p+p' &= \frac{2\varpi}{e}.\frac{e-e^2\cos\alpha}{1-e^2} + \frac{2\varpi'}{e'}.\frac{e'+e'^2\cos\alpha}{1-e'^2} \\ &= \frac{2\varpi}{1-e^2} + \frac{2\varpi'}{1-e'^2} + 2\cos\alpha\left(\frac{e\varpi}{1-e^2} - \frac{e'\varpi'}{1-e'^2}\right); \end{aligned}$$

or les deux ellipses étant homofocales, on a

$$\frac{e\varpi}{1-e^2} - \frac{e'\varpi'}{1-e'^2} = 0.$$

On a donc

$$p + p' = \frac{2\varpi}{1-e^2} + \frac{2\varpi'}{1-e'^2};$$

or $\frac{2\varpi}{1-e^2}$ et $\frac{2\varpi'}{1-e'^2}$ sont les grands axes des deux ellipses; la somme des paramètres variables des deux paraboles est donc égale à la somme des grands axes des deux ellipses, et, en vertu de l'équation (b), le rayon vecteur de leur point d'insertion est égal à la moitié de la somme de ces grands axes. C. Q. F. D.

2°. *Trouver en coordonnées elliptiques l'équation d'une parabole quelconque, tangente à une ellipse donnée, et dont le foyer coïncide avec l'un des foyers de l'ellipse.*

Soient

$$\rho = \frac{p}{1+\cos(\theta-\alpha)} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{\varpi}{1+e\cos\theta},$$

les équations de la parabole et de l'ellipse rapportées à leur foyer commun. On aura entre les indéterminées p, α, et les constantes ϖ et e, la relation trouvée dans le problème précédent

$$(1) \qquad p = \frac{2\varpi(1-e\cos\alpha)}{1-e^2}.$$

D'ailleurs l'équation de la parabole développée donne

$$(2) \qquad \rho + \rho.\cos\theta.\cos\alpha + \rho\sin\theta\,\sin\alpha = p.$$

Soit c la distance du centre de l'ellipse au foyer; et prenons pour coordonnées elliptiques du point $(\rho, \theta,)$ les demi-axes transverses λ, μ, de l'ellipse et de l'hyperbole, homofocales à l'ellipse donnée, qui se coupent en ce point. Les formules de transformation seront

$$\rho \cos\theta = \frac{\lambda\mu}{c} + c, \quad \rho \sin\theta = \frac{1}{c}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)},$$

d'où

$$\rho = \lambda + \mu.$$

L'équation (2) deviendra donc

$$(3)\ (\lambda + \mu) + \left(\frac{\lambda\mu}{c} + c\right)\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{c}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = p,$$

d'où

$$(4) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{c^2}\lambda^2\mu^2 + \frac{2(\lambda\mu)}{c}(\lambda+\mu) + (\lambda+\mu)^2 . \cos^2\alpha \\ &\qquad + 2\lambda\mu\left(1 - \frac{p\cos\alpha}{c}\right) + 2(\lambda+\mu)(c\cos\alpha - p) \\ &\qquad + p^2 + c^2 - 2pc\cos\alpha = 0. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'équation demandée. Elle détermine pour une valeur donnée de l'angle α, quatre paraboles symétriques par rapport aux deux axes ; car chaque couple de valeurs de λ et de μ détermine quatre points symétriques par rapport aux deux axes. Ces quatre paraboles satisfont aux conditions données ; leurs axes principaux font avec l'axe des x positifs les angles α, $\alpha + \frac{\pi}{2}$, $\alpha + \pi$, $\alpha + \frac{3\pi}{2}$.

3°. Soient

$$\Theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\theta . \sin^2\varphi}}, \quad \Theta' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\theta . \sin^2\varphi}};$$

il faut prouver que

$$\frac{\Theta}{\Theta'} - \frac{2}{\pi}\log(4\sin\theta\ \mathrm{tang}\,\theta) > 0.$$

Démonstration. Θ' étant positif, l'inégalité proposée revient à la suivante :

$$\Theta - \frac{2}{\pi}\Theta'.\log\left(\frac{4}{\cos\theta}\right) - \frac{2}{\pi}\Theta'\log(\sin^2\theta) > 0.$$

Or, en désignant par Q la série

$$Q = -\sum_1^\infty \cdot (\cos^2\theta)^n \cdot \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots 2n^2}$$
$$\times\left[1 + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{5.6} + \ldots + \frac{2}{(2n-1).2n}\right],$$

on a la relation (Verhulst, *Traité des fonctions elliptiques*, page 125)

$$\Theta - \frac{2}{\pi}\cdot\Theta'\log\left(\frac{4}{\cos\theta}\right) = Q.$$

L'égalité qu'il s'agit de démontrer devient donc

$$Q - \frac{2}{\pi}\Theta'.\log(\sin^2\theta) > 0.$$

Or

$$\Theta' = \frac{\pi}{2}\left[\begin{array}{l} 1 - \frac{1^2}{2^2}\cos^2\theta + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}\cos^4\theta + \ldots \\ + \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\cos^2\theta)^n + \ldots \end{array}\right]$$

$$-\log(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta + \frac{(\cos^2\theta)^2}{2} + \frac{(\cos^2\theta)^3}{3} + \ldots$$
$$+ \frac{(\cos^2\theta)^n}{n} + \ldots.$$

On a donc

$$-\frac{2}{\pi}\Theta'.\log(\sin^2\theta) = \sum_1^\infty (\cos^2\theta)^n$$
$$\times\left[\begin{array}{l} \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1^2}{2^2} + \frac{1}{n-2}\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} + \ldots \\ + \frac{1^2.3^2\ldots(2n-3)^2}{2^2.4^2\ldots(2n-2)^2} \end{array}\right]$$
$$> \sum_1^\infty \cdot \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\cos^2\theta)^n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right);$$

et, par conséquent,

$$Q - \frac{2}{\pi}\Theta'.\log(\sin^2\theta) > \sum_1^\infty \frac{1^2.3^2\ldots(2n-1)^2}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\cos^2\theta)^n$$

$$\times\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left(1+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(2n-.)2n}\right)\right].$$

Or, quel que soit le nombre entier n, la différence

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\left[1+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\ldots+(2n-1)\,2n\right]$$

est toujours positive; la série qui forme le second membre de l'inégalité précédente est donc positive, et l'on a

$$Q - \frac{2}{\pi}\cdot\Theta'\log(\sin^2\theta) > 0.$$

C. Q. F. D.