BOURGET

Note sur les équations de condition qui définissent un système de points

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 449-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__449_0>

NOTE

Sur les équations de condition qui définissent un système de points;

Par M. BOURGET,
Professeur à la Faculte des Sciences de Clermont.

1. Dans les Traités de Mécanique, on définit un système de points par l'ensemble des équations

$$\text{(A)} \qquad L = 0, \quad M = 0, \ldots$$

qui lient entre elles leurs coordonnées x, y, z; x', y', z', etc.

Certaines propriétés générales du mouvement exigent la condition spéciale de la *liberté* du système. Quels caractères doivent présenter les équations (1) pour que le système soit libre? C'est une question qui n'est pas résolue dans les ouvrages classiques, et sur laquelle je veux dire quelques mots dans cette Note.

2. J'appellerai *système libre* un système tel, qu'en le supposant à un instant quelconque invariable de figure par la solidification, on puisse lui donner un déplacement quelconque.

Or, un déplacement quelconque peut être produit par une translation unie à une rotation. D'autre part, une translation peut être considérée comme le déplacement résultant de trois mouvements parallèles aux axes, et la rotation autour d'un axe peut être regardée comme venant de la composition de trois rotations autour des mêmes lignes.

Donc nous pouvons dire qu'un système est *libre*, si, en le supposant solidifié à un instant quelconque, on peut lui donner trois translations arbitraires parallèlement aux axes, et trois rotations arbitraires autour des mêmes droites.

3. D'après ce qui précède, chacune des équations (A) doit être satisfaite identiquement à une époque quelconque, lorsqu'à la place de

$$x, \quad x', \quad x'', \ldots,$$

on met

$$x + a, \quad x' + a, \quad x'' + a, \ldots,$$

a étant une translation commune à tous les points parallèlement à Ox si le système est libre. Donc, dans cette hypothèse, on doit avoir l'identité

$$o = \frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dx'} + \frac{dL}{dx''} + \ldots = \sum \frac{dL}{dx},$$

et aussi les deux suivantes :

$$o = \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dy'} + \frac{dL}{dy''} + \ldots = \sum \frac{dL}{dy},$$

$$o = \frac{dL}{dz} + \frac{dL}{dz'} + \frac{dL}{dz''} + \ldots = \sum \frac{dL}{dz}.$$

4. Donnons à présent une rotation α autour de Ox; y et z varient seuls, et si nous nommons r la projection de OA sur le plan yOz, φ l'angle de cette ligne avec Oy, nous avons

$$y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi.$$

Donc la rotation α fera varier y et z de quantités δz, δy données par les équations (*)

$$\delta y = - z.\alpha, \quad \delta z = y.\alpha.$$

(*) Car

$$\delta y = - r\sin\varphi\, d\varphi = - z d\varphi,$$
$$\delta z = r\cos\varphi\, d\varphi = y d\varphi. \qquad \text{TM.}$$

Donc, si le système est libre, l'équation $L = 0$ sera identiquement satisfaite, quand à la place de

$$y,\ z,\quad y',\ z',\quad y'',\ z'',\ldots,$$

nous mettrons

$$y - z\alpha,\ z + y\alpha,\quad y' - z'\alpha,\ z' + y'\alpha,$$
$$y'' - z''\alpha,\ z'' + y''\alpha,\ldots;$$

ainsi donc nous devrons avoir l'identité

$$0 = \sum\left(y\frac{dL}{dz} - z\frac{dL}{dy}\right),$$

et de même les suivantes :

$$0 = \sum\left(z\frac{dL}{dx} - x\frac{dL}{dz}\right),$$
$$0 = \sum\left(x\frac{dL}{dy} - y\frac{dL}{dx}\right).$$

5. En résumé, la liberté du système, telle que nous l'avons définie, est caractérisée par les six équations suivantes, qui doivent être des identités :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \sum\frac{dL}{dx},\\ 0 &= \sum\frac{dL}{dy},\\ 0 &= \sum\frac{dL}{dz},\\ 0 &= \sum\left(y\frac{dL}{dz} - z\frac{dL}{dy}\right),\\ 0 &= \sum\left(z\frac{dL}{dx} - x\frac{dL}{dz}\right),\\ 0 &= \sum\left(x\frac{dL}{dy} - y\frac{dL}{dx}\right),\end{aligned}\right.$$

pour l'équation

$$L = 0,$$

et par six identités semblables pour chacune des autres équations

$$M = 0, \quad N = 0, \ldots .$$

6. A l'aide des relations précédentes, on voit découler naturellement les principes généraux des équations fondamentales de la dynamique

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \ldots, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \ldots, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \ldots, \\ m\frac{d^2x'}{dt^2} &= X' + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

que l'on déduit du principe de d'Alembert combiné avec celui des vitesses virtuelles, ou que l'on démontre directement ainsi que M. Poinsot l'a fait dans une note placée à la fin de son admirable *Statique*.

1°. Ajoutons membre à membre les équations relatives aux coordonnées de même nom, il vient

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum X + \lambda\sum\frac{dL}{dx} + \mu\sum\frac{dM}{dx} + \ldots,$$
$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y + \lambda\sum\frac{dL}{dy} + \mu\sum\frac{dM}{dy} + \ldots,$$
$$\sum m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z + \lambda\sum\frac{dL}{dz} + \mu\sum\frac{dM}{dz} + \ldots;$$

mais en nommant

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1$$

les coordonnées du centre de gravité, M la somme des masses, et en admettant que le système soit libre, ces équations conduisent à

$$M\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum X,$$

$$M\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \sum Y,$$

$$M\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \sum Z.$$

C'est de là que l'on déduit le principe du mouvement du centre de gravité.

On voit qu'il a lieu pour un système libre; mais on voit qu'il est encore vrai pour un système qui ne serait qu'imparfaitement libre, c'est-à-dire qui ne satisferait qu'aux équations de translation

$$o = \sum \frac{dL}{dx}, \quad o = \frac{dL}{dy}, \quad o = \frac{dL}{dz}.$$

2°. Multiplions les équations (C) respectivement par

$$2dx, \quad 2dy, \quad 2dz, \quad 2dx', \ldots,$$

ajoutons, il viendra

$$\frac{1}{2} d \sum m \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right)$$
$$= \sum (X dx + Y dy + Z dz) - \lambda \frac{dL}{dt} dt - \ldots,$$

car

$$o = \frac{dL}{dt} dt + \frac{dL}{dx} dx + \frac{dL}{dy} dy + \ldots,$$

$$o = \frac{dM}{dt} dt + \frac{dM}{dx} dx + \frac{dM}{dy} dy + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

D'où l'on voit que si L, M, etc., ne contiennent pas le temps explicitement, on obtient

$$\frac{1}{2}\,d\sum mv^2 = \sum(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dz + \mathrm{Z}\,dz),$$

d'où

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \sum\int(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz).$$

C'est l'équation des forces vives. On voit qu'elle a lieu pour tout système libre ou non libre, pourvu que les équations de conditions (A) ne contiennent pas le temps explicitement.

3°. Des équations fondamentales (C) nous tirons encore par une combinaison connue :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$
$$= \sum(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}) + \lambda\sum\left(y\frac{d\mathrm{L}}{dz} - z\frac{d\mathrm{L}}{dy}\right) + \ldots,$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$
$$= \sum(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}) + \lambda\sum\left(z\frac{d\mathrm{L}}{dx} - x\frac{d\mathrm{L}}{dz}\right) + \ldots,$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right)$$
$$= \sum(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}) + \lambda\sum\left(x\frac{d\mathrm{L}}{dy} - y\frac{d\mathrm{L}}{dx}\right) + \ldots,$$

et si le système est libre :

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(y\mathrm{Z} - z\mathrm{Y}),$$
$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum(z\mathrm{X} - x\mathrm{Z}),$$
$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}).$$

De là on tire le théorème des moments, et, dans un cas particulier, le principe des aires.

Ces équations, comme on voit, ont lieu dans le cas même où le système incomplétement libre pourrait tourner autour de l'origine après sa solidification.

En comparant les démonstrations précédentes à celles des Traités usuels de Mécanique, elles nous semblent préférables, d'abord parce qu'après avoir établi les équations du mouvement, il est naturel d'y chercher toutes ses propriétés générales, ensuite parce qu'on aperçoit très-bien par notre voie les conditions précises que le système doit remplir.

7. Nous pouvons nous demander à présent quelle composition supposent pour les équations

$$L = 0, \quad M = 0, \ldots,$$

relativement aux coordonnées, les conditions (B) différentielles de *liberté* du système.

Pour résoudre ce problème, il suffit d'intégrer les équations (B) aux dérivées partielles; mais on parvient au même but plus facilement peut-être en suivant la marche que nous allons indiquer.

A un instant quelconque, la forme du système est déterminée, si nous nous donnons les trois côtés du triangle $AA'A''$; puis les distances à ces trois sommets de chacun des autres points. Si actuellement nous nous donnons la position du triangle $AA'A''$, le système sera déterminé de forme et de position. Or, pour placer le triangle $AA'A''$, il suffit de connaître les trois coordonnées x, y, z du point A, deux coordonnées x', y' de A', une coordonnée x'' de A'', puisqu'en vertu des distances connues, il existe trois équations entre les coordonnées des points A, A' et A''. Donc en posant

$$AA' = p, \quad AA'' = q, \quad A'A'' = r, \quad AA''' = s, \ldots,$$

on aura entre les coordonnées x, y, z, x', etc., et les distances p, q, r, s, etc., $3n-6$ relations, d'où l'on tirera $3n-6$ coordonnées en fonction des six

$$x,\quad y,\quad z,\quad x',\quad y',\quad x''.$$

Substituant dans les équations

$$L=0,\quad M=0,\ldots,$$

chacune deviendra dans son premier membre fonction de ces six coordonnées et des distances p, q, r, etc., de sorte qu'on aura en particulier

$$0=L=F(x, y, z, x', y', x'', p, q, r, \ldots).$$

Actuellement supposons le système libre, donnons-lui les mouvements arbitraires déjà indiqués, et observons qu'après la solidification p, q, r, etc., ne changent pas; nous obtiendrons les identités

$$0=\frac{dL}{dx}+\frac{dL}{dx'}+\frac{dL}{dx''},$$

$$0=\frac{dL}{dy}+\frac{dL}{dy'},$$

$$0=\frac{dL}{dz},$$

$$0=y\frac{dL}{dz}-z\frac{dL}{dy}-z'\frac{dL}{dy'},$$

$$0=z\frac{dL}{dx}-x\frac{dL}{dz}+z'\frac{dL}{dx'}+z''\frac{dL}{dx''},$$

$$0=x\frac{dL}{dy}-y\frac{dL}{dx}+x'\frac{dL}{dy'}-y'\frac{dL}{dx'}-y''\frac{dL}{dx''}.$$

De la quatrième nous tirons

$$\frac{\frac{dL}{dy}}{z'}=\frac{\frac{dL}{dy'}}{-z}=\frac{0}{z'-z}\;(*),$$

(*) Car $\frac{dL}{dy}+\frac{dL}{dy'}=0$. T M.

et comme on peut toujours choisir un système d'axes tel, que $z - z'$ ne soit pas constamment nul, on voit que

$$\frac{dL}{dy} = 0, \quad \frac{dL}{dy'} = 0.$$

Des deux dernières, on tire alors

$$\frac{\frac{dL}{dx}}{y'z'' - z'y''} = \frac{\frac{dL}{dx'}}{zy'' - yz''} = \frac{\frac{dL}{dx''}}{yz' - zy'}$$
$$= \frac{0}{(y'z'' - z'y'') + (y''z - z''y) + (yz' - zy')},$$

par suite

$$\frac{dL}{dx} = 0, \quad \frac{dL}{dx'} = 0, \quad \frac{dL}{dx''} = 0.$$

Donc enfin,

Un système défini par les équations

$$L = 0, \quad M = 0, \ldots,$$

sera libre, si ces équations ont lieu seulement entre les fonctions des coordonnées qui déterminent la forme du système, sans déterminer sa position dans l'espace.