Segment sphérique à une base

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 438-439
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__438_0>

SEGMENT SPHERIQUE A UNE BASE;

Par UN ANONYME.

M. Mas Saint-Gueral, professeur au collége de Toulon, a indiqué la solution suivante de la question d'examen pour l'admissibilité à l'Ecole Navale, citée dans le numéro du mois d'août; *cette solution n'exige pas la connaissance de l'expression du volume de la sphère dont alors on peut la déduire.*

1°. Il est évident que si l'on prend un segment à deux bases, le centre étant situé d'un même côté des deux bases, le volume de ce segment est compris entre les volumes des deux cylindres de même hauteur que ce segment, et ayant pour base, l'un la plus grande base, l'autre la plus petite.

2° Nous admettons aussi que pour $h=0$ le volume d'une calotte sphérique à une base est nul, par conséquent on doit avoir simplement pour cette calotte

$$V = Ah^3 + Bh^2 + Ch$$

Soit

$$V' = Ah'^3 + Bh'^2 + Ch'$$

une seconde calotte à une base et telle, que le centre ne tombe pas entre les bases de ces deux calottes, ce qui peut avoir lieu en prenant $h - h'$ suffisamment petit. h étant supposé $> h'$, on aura pour le segment à deux bases qui est leur différence

$$V'' = (h - h')[A(h^2 + hh' + h'^2) + B(h + h') + C].$$

Les cylindres dont il est question dans la première remarque ont pour expression respective

$$\pi h'(2r - h')(h - h'),\quad \pi h(2r - h)(h - h');$$

par suite on a, en supprimant le facteur positif $h - h'$, les inégalités suivantes :

$$\begin{gathered}\pi h'(2r - h') < A(h^2 + hh' + h'^2)\\ + B(h + h') + C < \pi h(2r - h),\end{gathered}$$

pour toutes les valeurs de h' comprises entre o et h, h étant lui-même compris entre o et $2r$. Or pour $h' = h$, les limites extrêmes deviennent égales ; on a donc pour cette hypothèse

$$3Ah^2 + 2Bh + C = 2\pi rh - \pi h^2,$$

ce qui donne les équations de condition

$$A = -\frac{\pi}{3},\quad B = \pi r,\quad C = 0,$$

qui sont les valeurs demandées.

Remarque. Il n'est nullement nécessaire de supposer la fonction du troisième degré, mais seulement supérieure au second degré, car si l'on pose

$$V = Ah^m + Bh^{m-1} + \ldots + Mh^4 + Nh^3 + Ph^2 + Qh,$$

on trouve par la même analyse.

$$A = 0,\quad B = 0, \ldots,\quad M = 0,\quad N = -\frac{\pi}{3},\quad P = \pi r,\quad Q = 0.$$