

PAINVIN

**Application de la nouvelle analyse aux  
surfaces du second ordre**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 17  
(1858), p. 403-427

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1858\\_1\\_17\\_\\_403\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__403_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

**APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES  
DU SECOND ORDRE**

(voir page 370);

PAR M. PAINVIN,  
Docteur ès Sciences.

---

§ II. — *Discussion.*

8. Soit l'équation générale des surfaces du second  
26..

ordre

$$(I) \left\{ \begin{aligned} a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 \\ + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 \end{aligned} \right\} = 0$$

J'admets d'abord que cette équation renferme le carré d'une au moins des variables  $x_1, x_2, x_3$ , de  $x_1^2$ , par exemple, et qu'on ait rendu positif le coefficient  $a_{11}$  du carré restant ; c'est cette lettre qu'on devra placer au sommet de gauche du discriminant  $\Delta$ .

Puisque  $a_{11}$  n'est pas nul, on peut ordonner l'équation (I) par rapport à la variable  $x_1$ , et la mettre sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4)^2 + (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) x_2^2 \\ + (a_{11} a_{33} - a_{13}^2) x_3^2 + (a_{11} a_{44} - a_{14}^2) x_4^2 \\ + 2 (a_{11} a_{23} - a_{12} a_{13}) x_2 x_3 + 2 (a_{11} a_{24} - a_{12} a_{14}) x_2 x_4 \\ + 2 (a_{11} a_{34} - a_{13} a_{14}) x_3 x_4 \end{aligned} \right\} = 0,$$

ou

$$(II) \left\{ \begin{aligned} X_1^2 + p_{34} x_2^2 + p_{14} x_3^2 + p_{23} x_4^2 - 2 r_{14} x_2 x_3 - 2 r_{13} x_2 x_4 \\ - 2 r_{12} x_3 x_4 = 0, \end{aligned} \right.$$

en ayant égard aux formules (4) et en posant

$$X_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4.$$

Les hypothèses distinctes qu'il faudra faire pour élucider complètement tous les cas possibles sont au nombre de quatre ; nous allons les parcourir successivement.

#### *Première hypothèse.*

Le déterminant  $p_{34}$ , ou  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}}$  est différent de zéro.

9. On pourra alors continuer la décomposition en or-

donnant par rapport à la variable  $x_2$ , ce qui donnera

$$\begin{aligned} X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{p_{34} p_{34} - r_{1,4}^2}{p_{34}} x_3^2 - 2 \frac{p_{34} r_{12} + r_{13} r_{14}}{p_{34}} x_3 x_4 \\ + \frac{p_{34} p_{23} - r_{1,3}^2}{p_{34}} x_4^2 = 0, \end{aligned}$$

après avoir posé (*voir* les formules 4)

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} X_2 = \frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} x_2 - \frac{d^2 \Delta}{da_{23} da_{44}} x_3 - \frac{d^2 \Delta}{da_{24} da_{33}} x_4;$$

ou, en faisant usage des relations (7) et (9),

$$(III) \left\{ X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{34}} x_3^2 - 2 \frac{a_{11} \delta_{34}}{p_{34}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} \delta_{33}}{p_{34}} x_4^2 = 0. \right.$$

Le déterminant  $\delta_{44}$  ou  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est un *invariant*; cette expression jouit de la propriété caractéristique de se reproduire, quelle que soit la transformation de coordonnées *uni-modulaire* que l'on fasse subir à l'équation (I).

10. Supposons que l'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  soit différent de zéro; on pourra encore continuer la décomposition par rapport à la variable  $x_3$ , et l'on obtiendra

$$X_1^2 + p_{34} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{34}} X_3^2 + \frac{a_{11} \delta_{33} \delta_{44} - \delta_{3,4}^2}{p_{34} \delta_{44}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé (*voir* les formules 2)

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} X_3 = \frac{d\Delta}{da_{44}} x_3 - \frac{d\Delta}{da_{34}} x_4.$$

Si enfin l'on a égard à la première des relations (5), on sera conduit à la forme définitive

$$(IV) \quad X_1^2 + \frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11} \frac{d\Delta}{da_{44}}}{\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}}} X_3^2 + \frac{a_{11} \Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

On conclura donc, dans l'hypothèse actuelle, que lorsque l'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est différent de zéro, l'équation (I) représente des surfaces à centre unique (théorème n° 2).

Les coordonnées du centre seront données par les équations

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

Pour discuter l'équation (IV) je distinguerai deux cas.

PREMIER CAS. L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  et le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33}da_{44}}$  étant tous deux positifs, on voit que l'équation (IV) appartient au genre *ellipsoïde*, et que

Si  $\Delta < 0$ , on a un ellipsoïde réel ;

Si  $\Delta = 0$ , on a un point ;

Si  $\Delta > 0$ , on a un ellipsoïde imaginaire.

SECOND CAS. L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33}da_{44}}$ , l'équation (IV) appartient au genre *hyperboloïde*.

Avec  $\Delta > 0$ , on aura à considérer :

$$1^\circ. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad +;$$

$$2^\circ. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33}da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad -;$$

$$3^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} = 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît dans ces différents cas l'hyperboloïde à une nappe.

Avec  $\Delta < 0$ , on aura à considérer :

$$1^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad -;$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad +;$$

$$3^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad +;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin, avec  $\Delta = 0$ , on aura à considérer

$$1^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad -;$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad -;$$

$$3^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad +;$$

on reconnaît le cône.

Donc, en résumé,

Si  $\Delta < 0$ , on a un hyperboloïde à deux nappes ;

Si  $\Delta = 0$ , on a un cône ;

Si  $\Delta > 0$ , on a un hyperboloïde à une nappe.

11. Supposons maintenant que l'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  soit nul.

Il faut remonter à l'équation (III), et y introduire l'hypothèse  $\frac{d\Delta}{da_{44}} = \delta_{44} = 0$  ; elle devient alors

$$X_1^2 + p_3 X_2^2 - 2 \frac{a_{11} \delta_{34}}{p_{14}} x_3 x_4 + \frac{a_{11} \delta_{33}}{p_{34}} x_4^2 = 0.$$

On conclura donc, dans l'hypothèse actuelle, que lorsque l'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est nul, l'équation (I) représente des surfaces dénuées de centre ou possédant une infinité de centres (n° 2).

Afin de discuter l'équation (V) observons que la première des relations (5) (§ I<sup>er</sup>) donne, dans le cas actuel,

$$(1) \quad \Delta p_{14} = -(\delta_{14}),$$

ce qui montre que  $\Delta$  et  $p_{34}$  sont de signes contraires, et, en outre, que  $\Delta$  et  $\delta_{34}$  s'annulent en même temps, puis- qu'on suppose  $p_{34}$  différent de zéro.

Je distinguerai encore deux cas.

PREMIER CAS. L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  étant nul, et le discriminant  $\Delta$  différent de zéro, l'équation (V) appartient au genre paraboloidé ; et si

$\Delta < 0$ , c'est-à-dire  $p_{34} > 0$ , on a un paraboloidé elliptique ;

$\Delta > 0$ , c'est-à-dire  $p_{34} < 0$ , on a un paraboloidé hyperbolique.

SECOND CAS. L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  étant nul ainsi que le discriminant  $\Delta$ , l'équation (V) appartient au genre cylindrique.

On voit, en effet, par la relation (1), que si  $\Delta = 0$ , on aura  $\delta_{34} = 0$ , et réciproquement ; l'équation (V) prendra donc la forme

$$(VI) \quad X_1^2 + \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} X_2^2 + a_{11} \frac{\frac{d\Delta}{da_{33}}}{\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}} x^2 = 0,$$

et si

$$\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} > 0,$$

on aura un cylindre elliptique imaginaire ;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} < 0,$$

on aura un cylindre elliptique ;

$$\text{si} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \geq 0,$$

on aura un cylindre hyperbolique ;

$$\text{si } \frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} > 0 \text{ avec } \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

on aura deux plans imaginaires qui se coupent ou une droite ;

$$\text{si } \frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} < 0 \text{ avec } \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

on aura deux plans qui se coupent.

*Seconde hypothèse.*

*Le déterminant  $p_{34}$  ou  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}}$  est nul, et le déterminant  $p_{24}$  ou  $\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}}$  est différent de zéro.*

12. Dans cette hypothèse, il faut avoir recours à l'équation (II), qui devient alors :

$$X_1^2 + p_{24} x_3^2 + p_{23} x_4^2 - 2r_{14} x_2 x_3 - 2r_{13} x_2 x_4 - 2r_{12} x_3 x_4 = 0.$$

Le coefficient  $p_{24}$  étant différent de zéro, on pourra ordonner par rapport à la variable  $x_3$  et mettre l'équation sous cette forme

$$\begin{aligned} X_1^2 + p_{24} X_2^2 - \frac{r_{14}^2}{p_{24}} x_2^2 + \frac{p_{24} p_{23} - r_{12}^2}{p_{24}} x_4^2 \\ - 2 \frac{p_{24} r_{13} + r_{12} r_{14}}{p_{24}} x_2 x_4 = 0, \end{aligned}$$

après avoir posé (voir les formules 4)

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} X_2 = \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} x_2 - \frac{d^2 \Delta}{da_{23} da_{44}} x_3 - \frac{d^2 \Delta}{da_{34} da_{22}} x_4;$$

et enfin, en ayant égard aux relations (7) et (9), et y introduisant l'hypothèse  $p_{34} = 0$ , on trouvera

$$(VII) \quad X_1^2 + p_{24} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{24}} x_2^2 - 2 \frac{a_{11} \delta_{23}}{p_{24}} x_2 x_4 + \frac{a_{11} \delta_{22}}{p_{24}} x_4^2 = 0.$$

13. Supposons que l'invariant  $\delta_{44}$  soit différent de zéro; on pourra encore continuer la décomposition par rapport à la variable  $x_2$ , et on obtiendra

$$X_1^2 + p_{24} X_2^2 + \frac{a_{11} \delta_{44}}{p_{24}} X_3^2 + \frac{a_{11}}{p_{24}} \cdot \frac{\delta_{22} \delta_{44} - \delta_{24}^2}{\delta_{44}} x_4^2 = 0,$$

après avoir posé

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} X_3 = \frac{d\Delta}{da_{44}} x_2 - \frac{d\Delta}{da_{24}} x_4;$$

ou enfin, en faisant intervenir la seconde des relations (5),

$$(VIII) \quad X_1^2 + \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11} \frac{d\Delta}{da_{44}}}{\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}}} X_3^2 + \frac{a_{11} \Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0.$$

Or on admet  $\delta_{44} \geq 0$ , et  $p_{34} = 0$ ; la première des relations (7) donne

$$(2) \quad \delta_{44} a_{11} = - (r_{14})^2;$$

d'où il résulte que  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est nécessairement négatif.

Avec  $\Delta > 0$ , on aura à considérer :

$$1^\circ. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad -;$$

$$2^\circ. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à une nappe.

( 412 )

Avec  $\Delta < 0$ , on aura à considérer :

$$1^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad - \quad +;$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad +;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Enfin avec  $\Delta = 0$ , on aura à considérer :

$$1^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad + \quad -;$$

$$2^{\circ}. \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} < 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad +;$$

on reconnaît le cône.

Cette analyse complète le résumé correspondant au second cas de la première hypothèse (10).

14. Supposons maintenant que l'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  soit nul. Introduisant cette hypothèse dans l'équation (VII), il vient

$$(IX) \quad X_1^2 + p_{24} X_2^2 - 2 \frac{a_{11} \delta_{24}}{p_{24}} x_2 x_4 + \frac{a_{11} \delta_{22}}{p_{24}} x_4^2 = 0.$$

Or la seconde des relations (5) donne, puisque  $\delta_{44} = 0$ ,

$$(3) \quad \Delta p_{24} = -(\delta_{24})^2,$$

ce qui montre que  $\Delta$  et  $p_{24}$  sont de signes contraires, et, en outre, que  $\Delta$  et  $\delta_{24}$  s'annulent en même temps, puisqu'on suppose  $p_{24}$  différent de zéro.

Je distinguerai deux cas.

PREMIER CAS. *Le discriminant  $\Delta$  est différent de zéro.*

Alors  $\delta_{24}$  est différent de zéro, et on voit que si

$\Delta < 0$ , c'est à-dire  $p_{24} > 0$ , on a un paraboloides elliptique ;

$\Delta > 0$ , c'est à-dire  $p_{24} < 0$ , on a un paraboloides hyperbolique.

SECOND CAS. *Le discriminant  $\Delta$  est nul.*

Alors  $\delta_{24} = 0$ , et réciproquement. Dans ce cas, l'équation (IX) se réduit à

$$(X) \quad X_1^2 + \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} X_2^2 + \frac{a_{11} \frac{d\Delta}{da_{22}}}{\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}}} X_4^2 = 0.$$

Or la triple hypothèse ( $p_{34} = 0$ ,  $\delta_{44} = 0$ ,  $\delta_{24} = 0$ ), introduite dans la première et la seconde des relations (7), donne

$$(4) \quad r_{14} = 0, \quad \text{et} \quad \delta_{33} a_{11} = -(r_{13})^2;$$

puis dans la seconde des relations (9)

$$r_{13} p_{24} = 0,$$

et, comme  $p_{24}$  est différent de zéro, on en conclut  $r_{13} = 0$ , et par suite

$$(5) \quad \delta_{33} = 0.$$

La distinction des différentes espèces de surfaces ne peut donc plus se fonder sur la considération des détermi-

nants

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}},$$

qui sont nuls tous deux ; il faut y substituer les déterminants

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} \quad \text{et} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}}.$$

L'équation (X) nous conduira aux conséquences suivantes :

Lorsque

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} \geq 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta = 0,$$

$$\text{si} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} > 0,$$

on a un cylindre elliptique imaginaire ;

$$\text{si} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} < 0,$$

on a un cylindre elliptique ;

$$\text{si} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} \geq 0,$$

on a un cylindre hyperbolique ;

$$\text{si} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

on a deux plans imaginaires qui se coupent ;

$$\text{si} \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0,$$

on a deux plans qui se coupent.

Cette étude complète les résultats établis dans la première hypothèse (11).

*Troisième hypothèse.*

Les deux déterminants  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}}$  et  $\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}}$  sont nuls.

15. L'équation (II), à laquelle il faut maintenant avoir recours, devient

$$X_1^2 + p_{23} x_4^2 - 2 r_{14} x_2 x_3 - 2 r_{13} x_2 x_4 - 2 r_{12} x_3 x_4 = 0.$$

Or cette dernière équation peut être soumise aux transformations suivantes :

$$X_1^2 - (r_{14} x_2 + r_{12} x_4) \left( 2x_3 + 2 \frac{r_{13}}{r_{14}} x_4 \right) + \frac{r_{14} p_{23} + 2 r_{12} r_{13}}{r_{14}} x_4^2 = 0;$$

ou, en posant

$$2X_2 = r_{14} x_2 + r_{12} x_4 + 2x_3 + 2 \frac{r_{13}}{r_{14}} x_4;$$

$$2X_1 = r_{14} x_2 + r_{12} x_4 - 2x_3 - 2 \frac{r_{13}}{r_{14}} x_4;$$

$$(XI) \quad X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + \frac{r_{14} p_{23} + 2 r_{12} r_{13}}{r_{14}} x_4^2 = 0.$$

Or en y faisant  $p_{34} = 0$ ,  $p_{24} = 0$ , les trois premières des relations (7) (§ I<sup>er</sup>) donnent

$$(6) \quad \begin{cases} \delta_{44} a_{11} = -r_{14}^2; \\ \delta_{33} a_{11} = -r_{13}^2; \\ \delta_{22} a_{11} = -r_{12}^2; \end{cases}$$

mais la troisième du groupe (9), c'est-à-dire

$$\delta_{23} a_{11} = r_{13} r_{12} + r_{14} p_{23}$$

nous conduira à

$$\delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2 = - \frac{r_{14}^2 p_{23}^2 + 2 r_{12} r_{13} r_{14} p_{23}}{a_{11}^2};$$

et comme (relations 5, § I<sup>er</sup>)

$$\Delta p_{23} = \delta_{22} \delta_{33} - \delta_{23}^2;$$

il en résulte

$$(7) \quad \Delta = -\frac{r_{14}}{a_{11}^2} (r_{14} p_{23} + 2 r_{12} r_{13}).$$

16. Si l'on suppose  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  différent de zéro, ce qui, en vertu de la relation

$$\delta_{44} a_{11} = - (r_{14})^2$$

exige que  $r_{14}$  ne soit pas nul, et montre, en même temps, que  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est essentiellement négatif, l'équation (XI) peut s'écrire :

$$(XII) \quad X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + a_{11} \frac{\Delta}{\frac{d\Delta}{da_{44}}} x_4^2 = 0;$$

par suite, si

$\Delta < 0$ , on a un hyperboloïde à deux nappes;

$\Delta = 0$ , on a un cône;

$\Delta > 0$ , on a un hyperboloïde à une nappe.

17. Admettons, en second lieu, que l'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  soit nul.

Les trois hypothèses

$$p_{34} = 0, \quad p_{24} = 0, \quad \delta_{44} = 0,$$

donnent, d'après les relations (5) § I<sup>er</sup>,

$$(8) \quad \delta_{34} = 0, \quad \delta_{24} = 0;$$

puis, d'après la première des relations (7) § I<sup>er</sup>,

$$(9) \quad r_{14} = 0;$$

( 417 )

et enfin d'après la première des relations (10), § I<sup>er</sup>,

$$(10) \quad \Delta = 0$$

D'un autre côté l'équation (II) se réduit à

$$(XIII) \quad X_1^2 - 2 r_{13} x_2 x_4 - 2 r_{12} x_3 x_4 + p_{23} x_4^2 = 0.$$

C'est un cylindre parabolique.

Ainsi, lorsque

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{44}} = 0,$$

ce qui entraîne comme conséquence  $\Delta = 0$ , l'équation (I) représente un cylindre parabolique.

Ceci suppose que  $r_{13}$  et  $r_{12}$  ne sont pas nuls en même temps.

Si l'on avait  $r_{13} = 0$  et  $r_{12} = 0$ , ce qui donnerait, d'après les relations (7) § I<sup>er</sup>,

$$\delta_{33} = 0, \quad \delta_{22} = 0$$

et réciproquement, l'équation (XIII) deviendrait

$$(XIV) \quad X_1^2 + p_{23} x_4^2 = 0,$$

et représenterait deux plans parallèles imaginaires, si

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{33}} > 0;$$

deux plans parallèles, si

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{33}} < 0;$$

deux plans qui se confondent, si

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{33}} = 0.$$

*Quatrième hypothèse.*

L'équation (I) ne renferme aucun des carrés  $x_1^2$ ,  $x_2^2$ ,  $x_3^2$ .

18. Dans ce cas, il faut nécessairement admettre que l'équation proposée renferme au moins un des rectangles  $x_1 x_2$ ,  $x_1 x_3$ ,  $x_2 x_3$ . Nous conviendrons alors de placer au second rang de la première ligne du discriminant  $\Delta$  le coefficient  $a_{12}$  du rectangle  $x_1 x_2$  qu'on suppose exister dans l'équation.

Dans l'hypothèse où nous plaçons, l'équation (I) se présente sous la forme

$$(XV) \quad 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 + a_{44} x_4^2 = 0.$$

On arrivera encore à la décomposition en carrés, en suivant la méthode indiquée par M. Moutard. On prend les dérivées du premier membre  $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$  de l'équation ci-dessus par rapport aux variables  $x_1$  et  $x_2$ , faisant partie du rectangle qui n'a pas disparu, ce qui donne

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_1} = a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4;$$

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dx_2} = a_{12} x_1 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4;$$

puis on remarque que

$$\frac{1}{4} \frac{d\varphi}{dx_1} \frac{d\varphi}{dx_2} = \left\{ \begin{array}{l} a_{12}^2 x_1 x_2 + a_{12} a_{13} x_1 x_3 + a_{12} a_{14} x_1 x_4 \\ + a_{12} a_{23} x_2 x_3 + a_{12} a_{24} x_2 x_4 \\ + a_{23} a_{14} x_3 x_4 + a_{13} a_{24} x_3 x_4 + a_{13} a_{23} x_3^2 \\ + a_{14} a_{24} x_4^2 \end{array} \right\};$$

à cette équation on ajoute l'équation (XV), après avoir

multiplié ses deux membres par  $\frac{a_{12}}{2}$ , il vient

$$\frac{1}{4} \frac{d\varphi}{dx_1} \frac{d\varphi}{dx_2} - a_{13} a_{23} x_3^2 + (a_{12} a_{34} - a_{23} a_{14} - a_{13} a_{24}) x_3 x_4 \\ + \frac{a_{12} a_{44} - 2 a_{14} a_{24}}{2} x_4^2 = 0;$$

d'où l'on conclut, après avoir posé

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{d\varphi}{dx_2} \right), \\ X_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{d\varphi}{dx_2} \right), \end{cases}$$

$$(XVI) \quad X_1^2 - X_2^2 - 4 a_{13} a_{23} x_3^2 + 4 (a_{12} a_{34} - a_{23} a_{14} - a_{13} a_{24}) x_3 x_4 \\ + 2 (a_{12} a_{44} - 2 a_{14} a_{24}) x_4^2 = 0.$$

19. Supposons, en premier lieu, qu'aucun des coefficients  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  ne soit nul; on pourra alors former le carré par rapport à la variable  $x_3$ , et on trouvera

$$(XVII) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1^2 - X_2^2 - 4 a_{13} a_{23} X_3^2 \\ + \frac{2 a_{13} a_{23} (a_{12} a_{44} - 2 a_{14} a_{24}) + (a_{12} a_{34} - a_{14} a_{23} - a_{13} a_{24})^2}{a_{13} a_{23}} x_4^2 = 0, \end{array} \right.$$

en désignant par  $X_3$  la fonction linéaire

$$x_3 - \frac{a_{12} a_{34} - a_{14} a_{23} - a_{13} a_{24}}{2 a_{13} a_{23}} x_4.$$

Or si, dans les formules (3) et (4) (§ I<sup>er</sup>), on introduit les hypothèses particulières

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0,$$

il vient

$$(II) \quad \begin{cases} p_{34} = -a_{12}^2, \\ \delta_{44} = 2 a_{12} a_{13} a_{23}, \\ \delta_{33} = -a_{12} (a_{12} a_{44} - 2 a_{14} a_{24}), \\ \delta_{34} = a_{12} (a_{12} a_{34} - a_{14} a_{23} - a_{13} a_{24}). \end{cases}$$

La première de ces égalités nous montre que  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}}$  est différent de zéro et négatif; les autres nous permettent d'écrire ainsi qu'il suit l'équation (XVII) :

$$X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13} a_{23} X_3^2 + \frac{\delta_{34}^2 - \delta_{23} \delta_{44}}{a_{12}^2 a_{13} a_{23}} x_4^2 = 0,$$

ou enfin, si l'on a égard à la première des relations (5), § I<sup>er</sup>,

$$(XVIII) \quad X_1^2 - X_2^2 - 4a_{13} a_{23} X_3^2 + \frac{\Delta}{a_{13} a_{23}} x_4^2 = 0.$$

Or nous avons supposé que les coefficients  $a_{12}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  n'étaient pas nuls, ce qui exige, d'après la seconde des formules (11), que  $\delta_{44}$  soit différent de zéro.

Discutons maintenant l'équation (XVIII).

Avec  $\Delta > 0$ , on aura à considérer :

$$1^\circ. \quad a_{13} a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad +;$$

$$2^\circ. \quad a_{13} a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad -;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à une nappe.

Avec  $\Delta < 0$ , on aura à considérer :

$$1^\circ. \quad a_{13} a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad - \quad -;$$

$$2^{\circ}. \quad a_{13} a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad + \quad +;$$

on reconnaît l'hyperboloïde à deux nappes.

Avec  $\Delta = 0$ , on aura à considérer :

$$1^{\circ}. \quad a_{13} a_{23} > 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad -;$$

$$2^{\circ}. \quad a_{13} a_{23} < 0,$$

ce qui donne les alternances de signes

$$+ \quad - \quad +;$$

on reconnaît le cône.

20. Admettons, en second lieu, que l'un des coefficients  $a_{13}$ ,  $a_{23}$ , ou tous deux ensemble, soient nuls; on a, comme conséquence immédiate,

$$\delta_{44} = 0;$$

et, réciproquement, si  $\delta_{44} = 0$ , l'un ou l'autre des coefficients  $a_{13}$ ,  $a_{23}$  sera nul.

Dans le cas actuel, l'équation (XVI) deviendra, si, par exemple,  $a_{13} = 0$  :

$$(XIX) \quad \begin{cases} X_1^2 - X_2^2 + 4(a_{12} a_{34} - a_{14} a_{23}) x_3 x_4 \\ \quad + 2(a_{12} a_{44} - 2a_{14} a_{24}) x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Or, d'après les relations précédentes (11), on a

$$p_{34} = -a_{12}^2,$$

$$\delta_{44} = 0,$$

$$\delta_{34} = a_{12} (a_{34} a_{12} - a_{14} a_{23});$$

d'où

$$a_{12}^2 \Delta = (\delta_{34})^2.$$

On voit, d'après la valeur ci-dessus, que  $\delta_{34}$  n'est pas nul, si l'on n'introduit pas d'autre hypothèse que celles que nous avons admises; et, par suite, il en est de même de  $\Delta$ : on remarquera, en outre, que  $\Delta$  est essentiellement positif.

L'équation (XIX) représentera alors un *paraboloïde hyperbolique*; conséquence qui se trouve incluse dans les conclusions du n° 11.

Supposons enfin  $\Delta = 0$ ; ce qui exige que  $\delta_{34}$  soit nul, et réciproquement. L'équation (XIX) se réduit à

$$X_1^2 - X_2^2 + 2(a_{12}a_{44} - 2a_{14}a_{24})x_4^2 = 0,$$

ou, en ayant égard aux relations (11),

$$(XX) \quad X_1^2 - X_2^2 - 2 \frac{\delta_{33}}{a_{12}} x_4^2 = 0.$$

Or, dans ce cas,

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} = -a_{12}^2 < 0;$$

on aura, par suite, à considérer

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \geq 0,$$

ce qui donne un cylindre hyperbolique;

$$\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} < 0 \quad \text{avec} \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0,$$

ce qui donne deux plans qui se coupent.

21. Cette discussion détaillée nous montre que tous les genres et toutes les espèces, dans les surfaces du second ordre, se trouvent parfaitement caractérisés dans les

tableaux suivants, qui en présenteront le résumé sous plusieurs points de vue.

*Résumés.*

1°. — **INVARIANT**  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  **DIFFÉRENT DE ZÉRO.**

1<sup>re</sup> FAMILLE. — Surfaces à centre unique.

I<sup>er</sup> CAS. — L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  et le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  tous deux positifs; genre ellipsoïde.

Discriminant  $\Delta$   $\left\{ \begin{array}{ll} \text{négatif. . .} & \text{Ellipsoïde réel.} \\ \text{nul. . . . .} & \text{Point.} \\ \text{positif. . .} & \text{Ellipsoïde imaginaire.} \end{array} \right.$

N. B. Le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  ne peut pas être nul dans ce cas

II<sup>e</sup> CAS. — L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  étant différent de zéro et n'étant pas positif en même temps que le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$ ; genre hyperboloïde.

Discriminant  $\Delta$   $\left\{ \begin{array}{ll} \text{négatif. . .} & \text{Hyperboloïde à deux nappes.} \\ \text{nul. . . . .} & \text{Cône.} \\ \text{positif. . .} & \text{Hyperboloïde à une nappe.} \end{array} \right.$

N. B. Le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  peut être quelconque, positif, négatif, ou nul.

2°. — INVARIANT  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  NUL.

2° FAMILLE. — Surfaces dénuées de centre ou possédant une infinité de centres.

I<sup>er</sup> CAS. — L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  étant nul et le discriminant  $\Delta$  différent de zéro ; genre parabolöide.

Discriminant  $\Delta$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{négatif. . . Parabolöide elliptique.} \\ \text{positif. . . Parabolöide hyperbolique.} \end{array} \right.$

N. B. Le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  peut être quelconque, positif, négatif, ou nul ; seulement, il ne peut pas être nul en même temps que  $\frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}}$ , car il en résulterait  $\Delta = 0$ .

II<sup>e</sup> CAS. — L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  et le discriminant  $\Delta$  étant nuls ; genre cylindrique.

I°. Les deux déterminants  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  et  $\frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}}$  n'étant pas nuls en même temps :

Si  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} \geq 0$ ,

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} > 0, \quad \text{cylindre elliptique imaginaire;} \\ \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} < 0, \quad \text{cylindre elliptique;} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} \geq 0, \quad \text{cylindre hyperbolique;} \\ \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} > 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, \quad \text{deux plans imaginaires qui se} \\ \hspace{10em} \text{coupent ou une droite;} \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} < 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, \quad \text{deux plans qui se coupent.} \end{array} \right.$

Si  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} = 0$  et  $\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} \geq 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} > 0, \quad \text{cylindre elliptique imaginaire;} \\ \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} < 0, \quad \text{cylindre elliptique;} \\ \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} < 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} \geq 0, \quad \text{cylindre hyperbolique;} \\ \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} > 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0, \quad \text{deux plans imaginaires qui se} \\ \hspace{15em} \text{coupent ou une droite;} \\ \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} < 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0, \quad \text{deux plans qui se coupent.} \end{array} \right.$$

II°. Les deux déterminants  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}}$  et  $\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}}$  étant nuls en même temps :

1°. Si  $\frac{d\Delta}{da_{33}}$  et  $\frac{d\Delta}{da_{22}}$  ne sont pas nuls à la fois, on a un cylindre parabolique ;

2°. Si  $\frac{d\Delta}{da_{33}} = 0$  et  $\frac{d\Delta}{da_{22}} = 0$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{33}} > 0, \quad \text{on a deux plans parallèles imaginaires;} \\ \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{33}} < 0, \quad \text{on a deux plans parallèles;} \\ \frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{33}} = 0, \quad \text{on a deux plans qui se confondent.} \end{array} \right.$$

N. B. Les hypothèses  $\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0$ ,  $\frac{d^2 \Delta}{da_{33} da_{44}} = 0$ ,  $\frac{d^2 \Delta}{da_{22} da_{44}} = 0$  entraînent, comme conséquence,  $\Delta = 0$  ; mais il n'y a pas réciprocity.

22. On pourra résumer ainsi les signes caractéristiques des différents genres de surfaces :

*Genre ellipsoïde.* L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  et le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  sont tous deux positifs;  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  n'est jamais nul.

*Genre hyperboloïde.* L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est différent de zéro et n'est pas positif en même temps que le déterminant  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$ , qui d'ailleurs peut être nul.

*Genre paraboloidé.* L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  est nul, et le discriminant  $\Delta$  est différent de zéro;  $\frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}}$  peut être nul.

*Genre cylindrique.* L'invariant  $\frac{d\Delta}{da_{44}}$  et le discriminant  $\Delta$  sont tous deux nuls.

23. On peut encore dire, si l'on convient de regarder l'ellipsoïde imaginaire, comme une surface réglée :

*Discriminant négatif.* Surfaces réelles dénuées de génératrices rectilignes.

*Discriminant positif.* Surfaces réglées gauches.

*Discriminant nul.* Surfaces réglées développables

24. Nous achèverons cette discussion en énonçant les conditions déterminantes des surfaces particulières du second degré.

Pour que l'équation générale du second degré représente :

( 427 )

Un cône, il faut et il suffit que

$$\Delta = 0;$$

un parabolôide, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \text{ et } \Delta \geq 0;$$

un cylindre elliptique ou hyperbolique, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \Delta = 0;$$

un cylindre parabolique, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}} = 0;$$

deux plans qui se coupent, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \Delta = 0 \text{ et } \begin{cases} \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, & \text{si } \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} \geq 0, \\ \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0, & \text{si } \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} = 0; \end{cases}$$

deux plans parallèles, il faut et il suffit que

$$\frac{d\Delta}{da_{44}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{33}} = 0, \quad \frac{d\Delta}{da_{22}} = 0, \\ \frac{d^2\Delta}{da_{33} da_{44}} = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{da_{22} da_{44}} = 0.$$

---

*Note.* Le théorème sur des normales inséré (t. XVI, p. 464) est consigné dans un Mémoire de M. Liouville et inséré dans son journal (t. VI, p. 403). (DEWULF.)

---