NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

DE JONQUIÈRES

Solution géométrique de la question 296

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 399-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__399_1>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 296

(voir t. XIV, p. 142);

PAR M. DE JONQUIÈRES.
Lieutenant de vaisseau.

La question peut s'exprimer ainsi :

Étant donnés sur un plan deux systèmes de sept points qui se correspondent un à un, trouver dans ce plan deux points P, P′ *tels, que si on les joint aux points donnés, respectivement, les deux faisceaux résultants soient homographiques.*

Cette question est *déterminée*, car elle comporte quatre conditions, savoir que les quatre rapports anharmoniques

$$\mathrm{P}(abcd),\quad \mathrm{P}(abce),\quad \mathrm{P}(abcf),\quad \mathrm{P}(abcg)$$

soient égaux respectivement aux quatre rapports anharmoniques

$$\mathrm{P}'(a'\,b'\,c'\,d'),\quad \mathrm{P}'(a'\,b'\,c'\,e'),\quad \mathrm{P}'(a'\,b'\,c'f'),\quad \mathrm{P}'(a'\,b'\,c'\,g'),$$

et il faut précisément quatre éléments pour déterminer deux points, par exemple leurs distances à deux axes fixes, telles que leurs coordonnées x, y.

Si les deux systèmes se composent de six points chacun, au lieu de sept, la question est *indéterminée*, puisqu'elle ne comporte que trois conditions. D'ailleurs on ne peut pas prendre arbitrairement un point P. Donc une infinité de points satisfont à la question, et ils sont distribués sur un lieu géométrique qu'il s'agit de déterminer.

Cette détermination entraînera évidemment la solution complète du problème proposé, et par conséquent elle constitue la seule difficulté qu'il présente. En effet, si ces lieux géométriques, relatifs aux systèmes a, b, c, d, e, f et a', b', c', d', e', f', sont deux courbes U et U' et sont deux autres courbes V, V' relativement aux systèmes a, b, c, d, e, g et a', b' c', d', e', g', il est clair que les points communs aux courbes U et V, et les points communs aux courbes U' et V', seront précisément ceux qui résolvent la question.

Les raisonnements étant identiques pour chacune de ces quatre courbes, il suffit de s'occuper de la courbe U.

Je dis qu'elle passe par les six points a, b, c, d, e, f, et qu'elle n'a pas de points multiples en ces points. Car si l'on suppose le point P en a, par exemple, et qu'on détermine le point P' tel, que le faisceau P' $(b'c'd'e'f')$ soit homographique au faisceau P $(bcdef)$, lequel point a toujours, comme on sait, une position et une seule; comme la direction de la droite Pa est indéterminée, on peut dire que le point P satisfait à la question que le faisceau P $(abcdef)$ soit homographique au faisceau P' $(a'b'c'd'e'f')$; ce qui prouve que la courbe cherchée passe par le point P, qui est ici le point a; et elle n'y passe qu'une fois, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de point multiple en ce point, parce qu'il n'existe qu'une seule position correspondante du point P'.

Cela posé, je vais démontrer qu'une conique quelconque C, menée par les quatre points a, b, c, d, ne peut rencontrer la courbe cherchée qu'en deux points autres que ces quatre là, ce qui suffira pour prouver que cette courbe est du troisième ordre.

Soit C' la conique *homographique* passant par les quatre points a', b', c', d', c'est-à-dire la conique qui est *capable* du même rapport anharmonique que C, ou qui *sous-tend* le même rapport que C. Deux points fixes O, O', pris sur ces deux courbes respectivement, donnent lieu à deux rapports anharmoniques égaux

$$O(abcd), \quad O'(a'b'c'd').$$

Qu'on prenne sur la seconde un point P' arbitrairement; il lui correspond sur la première un point P, et un seul, tel que le rapport anharmonique $P(abce)$ est égal au rapport anharmonique $P(a'b'c'e')$; et réciproquement, un point P étant pris sur la première conique, il lui correspond sur la seconde un seul point P' tel, que les deux rapports anharmoniques soient égaux. Donc les deux droites OP et O'P' tournant autour des deux points fixes O, O' *se correspondent anharmoniquement*. Que l'on considère maintenant le rapport anharmonique $P'(a'b'c'f')$; il correspondra au point P' un point P_1 sur la conique C tel, que le rapport anharmonique $P_1(abcf)$ sera égal à $P'(a'b'c'f')$, et la droite OP_1 *correspondra anharmoniquement* à la droite O'P'. Donc les deux droites OP et OP_1 se correspondent anharmoniquement, c'est-à-dire qu'elles forment deux faisceaux homographiques. Ces deux faisceaux ont deux rayons doubles (réels ou imaginaires) dont chacun détermine, sur la conique C, un point P auquel correspond, sur la conique C', un point P' tel, que les deux rapports anharmoniques

$$P'(a'b'c'e') \quad \text{et} \quad P'(a'b'c'f')$$

sont égaux respectivement aux deux rapports anharmoniques

$$P(abce) \quad \text{et} \quad P(abcf).$$

Le point P appartient donc à la courbe cherchée. Et comme il n'existe que deux rayons doubles, il n'existe aussi que deux points semblables. Ce qu'il fallait démontrer.

Donc la courbe U, lieu des points P, est du troisième ordre, et il en est de même de la courbe U', lieu des points P'.

La démonstration qui précède fait voir comment on pourra se procurer un nombre de points suffisants pour construire ces courbes, et elle montre aussi de quelle manière leurs points respectifs se conjuguent deux à deux pour satisfaire aux conditions du problème. On connaît déjà six points de chacune d'elles : ce sont les six points donnés dans chaque système, et il est d'ailleurs à peu près inutile de remarquer que si le point P est placé en l'un quelconque a des points du premier système, le point conjugué P' ne se trouve pas en a' généralement.

Les courbes V et V' sont également des courbes du troisième ordre passant respectivement par les six points a, b, c, d, e, g et a', b', c', d', e', g'.

Les courbes U et V, ayant en commun les cinq points a, b, c, d, e se coupent en quatre autres points p, q, r, s, et les courbes U' et V' se coupent aussi en quatre points p', q', r', s' autres que a', b', c', d', e'. Les quatre premiers sont les points P et les quatre autres sont les points P', qui satisfont à l'énoncé du problème général, lequel admet ainsi quatre solutions, qui peuvent d'ailleurs être, en tout ou en partie, réelles ou imaginaires, celles-ci marchant toujours par couples comme de raison.

Quant à la construction des points p, q, etc., elle s'effectue *géométriquement*, d'une manière très-simple, sans exiger le tracé des courbes du troisième ordre qui sont seulement déterminées par neuf de leurs points respectivement. Mais je n'entrerai pas ici dans le détail de cette question accessoire, qui est résolue complétement dans l'ouvrage que j'ai publié sous le titre de *Mélanges de Géométrie pure*, chap. IV, n° 41.

Mais les quatre points d'intersection p, q, r, s de ces deux courbes ne peuvent pas satisfaire tous les quatre à la question, et par conséquent il y en a au moins un qui lui est étranger. Car s'ils satisfaisaient tous les quatre, une troisième courbe, construite avec les six points a, b, c, d, f, g, passerait aussi par ces quatre points. Cette courbe et les deux premières auraient donc huit points communs, savoir, a, b, c, d et les quatre p, q, r, s. Par conséquent les trois courbes passeraient par un même neuvième point. Ce point serait e à l'égard des deux premières courbes, f à l'égard de la première et de la troisième, et g à l'égard de la deuxième et de la troisième. Résultat impossible. Donc le problème proposé n'admet que trois solutions, ainsi que M. Chasles l'a annoncé dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.