NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

S. ARONHOLD

Remarque sur la résolution des équations biquadratiques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 391-392

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__391_0>

REMARQUE SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BIQUADRATIQUES;

PAR M. LE D[r] S. ARONHOLD, DE BERLIN.

Si l'on représente l'équation donnée par

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

et que l'on calcule les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} a, & b, & c+2\lambda \\ b, & c-\lambda, & d \\ c+2\lambda, & d, & e \end{vmatrix}, \quad \frac{d\Delta}{de} = \begin{vmatrix} a, & b \\ b, & c-\lambda \end{vmatrix},$$

alors $\Delta = 0$ est une équation cubique de la forme

$$\Delta = -4\lambda^3 + (ac - 4bd + 3c^2)\lambda + ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd = 0,$$

qui, manquant du second terme, pourra être résolue directement par la règle de Cardan. Soient

$$\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1, \quad \left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2, \quad \left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3$$

les valeurs du second déterminant pour les trois racines de l'équation $\Delta = 0$, on aura

$$(1) \quad x = \frac{1}{a}\left[-b \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_1} \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_2} \pm \sqrt{\left(\frac{d\Delta}{de}\right)_3}\right],$$

où les signes correspondants doivent être tels, que le produit soit positif.

On a encore plus généralement, pour des valeurs quelconques de ξ et de η,

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{(ax+b)\,\xi^3+3\,(bx+c)\,\xi^2\eta+3\,(cx+d)\,\xi\eta^2+(dx+e)\,\eta^3}{\xi-\eta x} \\
= \left\{
\begin{array}{l}
\pm\sqrt{\left(\dfrac{d\Delta}{de}\right)_1\xi^4-\left(\dfrac{d\Delta}{dd}\right)_1\xi^3\eta+\left(\dfrac{d\Delta}{dc}\right)_1\xi^2\eta^2-\left(\dfrac{d\Delta}{db}\right)_1\xi\eta^3+\left(\dfrac{d\Delta}{da}\right)_1\eta^4} \\
\pm\sqrt{\left(\dfrac{d\Delta}{de}\right)_2\xi^4-\left(\dfrac{d\Delta}{dd}\right)_2\xi^3\eta+\left(\dfrac{d\Delta}{dc}\right)_2\xi^2\eta^2-\left(\dfrac{d\Delta}{db}\right)_2\xi\eta^3+\left(\dfrac{d\Delta}{da}\right)_2\eta^4} \\
\pm\sqrt{\left(\dfrac{d\Delta}{de}\right)_3\xi^4-\left(\dfrac{d\Delta}{dd}\right)_3\xi^3\eta+\left(\dfrac{d\Delta}{dc}\right)_3\xi^2\eta^2-\left(\dfrac{d\Delta}{db}\right)_3\xi\eta^3+\left(\dfrac{d\Delta}{da}\right)_3\eta^4}
\end{array}
\right\},
\end{array}
\right.
$$

d'où l'on tire la valeur précédente de x en faisant $\xi = 1$, $\eta = 0$; pour $\xi = 0$, $\eta = 1$, on obtiendrait $\frac{1}{x}$.

Les déterminants doivent toujours être calculés de manière que le terme provenant de la diagonale de gauche à droite soit pris négativement.

Note du Traducteur. Comme

$$\frac{d\Delta}{de} = a\lambda + b$$

et que

$$ax + b = y,$$

on a

$$x = \frac{1}{a}(-b + y),$$

la formule (1) est vérifiée par ce qui précède. La démonstration de la formule (2) exige quelques explications qui pourront être données dans un autre article.