V.-A. LEBESGUE

Sur la résolution des équations du quatrième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 386-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__386_1>

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. V.-A. LEBESGUE.

1. Il y a bien des moyens de ramener la résolution d'une équation du quatrième degré à celle d'une autre équation du troisième. Le plus simple paraît le suivant.

On a identiquement

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left[x^2 + \frac{1}{2}(p+\theta)\right]^2 - \left(x\sqrt{\theta} - \frac{q}{2\sqrt{\theta}}\right)^2$$
$$+ r - \frac{1}{4}(p+\theta)^2 + \frac{q^2}{4\theta};$$

si donc on pose

$$r = \frac{1}{4}(p+\theta)^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{q^2}{\theta},$$

ou bien

$$(1) \qquad \theta^3 + 2p\theta^2 + (p^2 - 4r)\theta - q^2 = 0,$$

le polynôme $x^4 + px^2 + qx + r$ deviendra

$$\left[x^2 + x\sqrt{\theta} + \frac{1}{2}(p+\theta) - \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\theta}\right]\left[x^2 - x\sqrt{\theta} + \frac{1}{2}(p+\theta) + \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{\theta}\right];$$

égalant chaque facteur à zéro, on trouvera les quatre racines

$$2x = \sqrt{\theta} \pm \sqrt{-2p - \theta - \frac{2q}{\sqrt{\theta}}},$$
$$2x = -\sqrt{\theta} \pm \sqrt{-2p - \theta + \frac{2q}{\sqrt{\theta}}}.$$

Comme l'équation en θ a toujours une racine réelle positive, on a les quatre racines sans ambiguïté sous forme réelle ou sous forme imaginaire $\alpha + \beta\sqrt{-1}$.

2. On peut aussi, d'après la méthode d'Euler (*Alg.*, ch. 15), poser

$$2x = \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}.$$

Faisant disparaître les radicaux et identifiant avec l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

on trouve sans difficulté

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = -2p, \quad \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 = p^2 - 4r,$$
$$\sqrt{\theta_1}.\sqrt{\theta_2}.\sqrt{\theta_3} = -q,$$

d'où la même réduite en θ.

Si l'on mettait $\sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}$ sous la forme

$$\sqrt{(\sqrt{\theta_2}+\sqrt{\theta_3})^2} = \sqrt{\theta_2 + \theta_3 + 2\sqrt{\theta_2}.\sqrt{\theta_3}} = \sqrt{-2p - \theta_1 - \frac{2q}{\sqrt{\theta_1}}},$$

on retrouverait les formules précédentes. Les signes des radicaux dans la valeur de $2x$ sont déterminés par l'équation

$$\sqrt{\theta_1}\sqrt{\theta_2}.\sqrt{\theta_3} = -q.$$

Comme on a employé l'équation

$$\theta_1.\theta_2.\theta_3 = q^2,$$

la réduite (1) appartient à l'équation double

$$x^4 + px^2 \pm qx + r = 0.$$

L'équation

$$2x = \sqrt{\theta_1} + \sqrt{\theta_2} + \sqrt{\theta_3}$$

présente en effet huit valeurs, dont quatre appartiennent à l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

et les quatre autres à l'équation

$$x^4 + px^2 - qx + r = 0.$$

3. En modifiant la méthode d'Euler, on aurait pu poser

$$2x = \sqrt{m\theta_1 + n} + \sqrt{m\theta_2 + n} + \sqrt{m\theta_3 + n},$$

et déterminer m, n de manière à obtenir une réduite du troisième degré sans second terme, qui s'est présentée à MM. Cayley (*), Hesse, Hermite, Aronhold et à d'autres peut-être.

Prenons l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0\,;$$

en posant

$$ax + b = y,$$

il viendra

$$(2)\quad \left\{ \begin{array}{l} y^4 - b(b^2 - ac)y^2 + 4(2b^3 - 3abc + a^2d)y \\ -(3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e) = 0. \end{array} \right.$$

Soit donc

$$y = \sqrt{A\lambda_1 + B} + \sqrt{A\lambda_2 + B} + \sqrt{A\lambda_3 + B} = V_1 + V_2 + V_3,$$

λ_1, λ_2, λ_3 étant les trois racines de l'équation

$$\lambda^3 + Q\lambda - R = 0,$$

ce qui suppose

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = Q, \quad R = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$

A et B devront être déterminés convenablement.

On a d'abord, à cause de $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, $y = V_1 + V_2 + V_3$,

$$y^2 - 3B = 2(V_1V_2 + V_2V_3 + V_3V_1).$$

Carrant de nouveau

$$y^4 - 6By^2 + 9B^2 = 4(V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_1^2)_2 + 8V_1V_2V_3y:$$

or, substituant les valeurs des V^2, on a

$$V_1^2V_2^2 + V_2^2V_3^2 + V_3^2V_1^2 = A^2Q + 3B^2\,;$$

donc

$$y^4 - 6By^2 - 8V_1V_2V_3y - (3B^2 + 4A^2Q) = 0.$$

(*) Arthur Cayley, avocat, né à Richmond (Surrey), le 16 août 1821.

De là, comparant cette dernière équation avec l'équation (2), on obtient

$$(2) \qquad B = b^2 - ac, \quad Q = \frac{a^2(4bd - ae - 3c^2)}{4A^2};$$

on peut donc faire

$$A = a, \quad Q = \frac{4bd - ae - 3c^2}{4}.$$

Enfin

$$V_1 V_2 V_3 = \sqrt{A^3 R + A^2 BQ + B^3},$$

l'équation

$$4(2b^3 - 3abc + a^2 d) = \mp 8\sqrt{a^3 R + a^2(b^2 - ac)Q + (b^2 - ac)^3}$$

donnera

$$R = \frac{ad^2 + eb^2 + c^3 - ace - 2bcd}{4};$$

de là l'équation

$$4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0:$$

c'est l'équation

$$4\theta^3 - i\theta + J = 0,$$

de MM. Hermite et Cayley ; en changeant le signe, on a l'équation

$$\Delta = 0,$$

de M. Aronhold (*). Suit la traduction d'une note mise à ce sujet par ce géomètre dans le tome LII du Journal de Crelle.

(*) Siegfried-Henri, professeur de mathématiques à l'école d'architecture de Berlin. Né à Angerburg (Prusse orientale) en 1819.