FAURE

Transformation des propriétés métriques des figures

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 381-386

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__381_0>

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES

(voir page 276);

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

Transformation des relations d'aires.

4. *Transformer homographiquement l'aire d'un triangle* a', b', c'.

Soient (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_3, y'_3) les coordonnées des sommets a', b', c', et S' la surface du triangle,

$$2S' = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & 1 \\ x'_2 & y'_2 & 1 \\ x'_3 & y'_3 & 1 \end{vmatrix},$$

et en ayant égard aux formules de transformation (p. 279)

$$2S' = \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 + c, & a'x_1 + b'y_1 + c', & a''x_1 + b''y_1 + c'' \\ ax_2 + by_2 + c, & a'x_2 + b'y_2 + c', & a''x_2 + b''y_2 + c'' \\ ax_3 + by_3 + c, & a'x_3 + b'y_3 + c', & a''x_3 + b''y_3 + c'' \end{vmatrix} \mathrm{P},$$

nous posons

$$\mathrm{P} = \frac{1}{(a''x_1 + b''y_1 + c'')(a''x_2 + b''y_2 + c'')(a''x_3 + b''y_3 + c'')}.$$

La valeur de $2S'$ peut s'écrire

$$2S' = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \mathrm{P}.$$

abc étant le triangle homographique au triangle $a'b'c'$, appelons α, β, γ les distances des sommets du triangle abc à la droite I (p. 280), donnée par l'équation

$$a''x + b''y + c'' = 0,$$

et S l'aire de ce triangle,

$$a''x_1 + b''y_1 + c'' = \alpha\sqrt{a''^2 + b''^2},$$
$$a''x_2 + b''y_2 + c'' = \beta\sqrt{a''^2 + b''^2},$$
$$a''x_3 + b''y_3 + c'' = \gamma\sqrt{a''^2 + b''^2},$$
$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$S' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} (a''^2 + b''^2)^{-\frac{3}{2}} \frac{S}{\alpha.\beta.\gamma}.$$

L'aire d'un triangle est égale à celle du triangle homographique divisée par le produit des distances des sommets de ce triangle à la droite I *et multipliée par une constante.*

Dans deux figures homographiques, il existe trois points qui, considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde (p. 280). Si a', b', c' sont ces trois points, $S = S'$, donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} (a''^2 + b''^2)^{-\frac{3}{2}} = \alpha.\beta\ \gamma.$$

Ainsi le coefficient numérique qui entre dans la valeur de S' est égal au produit des distances des trois points, qui sont eux-mêmes leurs homologues, à la droite I. Nous désignerons, pour abréger, ce coefficient par la lettre m, de sorte que

$$\text{(I)} \qquad S' = m\frac{S}{\alpha.\beta.\gamma}.$$

5. Examinons ce que devient cette formule lorsqu'un ou deux des sommets du triangle abc sont à l'infini, ce

qui revient à supposer les sommets correspondants du triangle a', b', c' sur la droite I′ (p. 280).

Désignons par A, B, C les côtés du triangle abc respectivement opposés aux angles a, b, c, et par a_1, b_1, c_1 les points d'intersection de ces mêmes côtés avec la droite I,

$$S = abc = \frac{1}{2}\, ab\,.ac \sin(B, C),$$

$$\gamma = cb_1 \sin(B, I),$$

donc

$$\frac{S}{\alpha.\beta.\gamma} = \frac{1}{2}\,\frac{ab\,.ac \sin(B, C)}{\alpha.\beta.cb_1 \sin(B, I)}.$$

Si l'on suppose le point c à l'infini, $\frac{ac}{cb_1} = 1$,

(1)
$$S' = \frac{m}{2}\,\frac{ab \sin(B, C)}{\alpha.\beta.\sin(B, I)}.$$

On a aussi

$$\beta = bc_1 \sin(C, I).$$

Substituant dans la formule précédente et faisant passer b à l'infini,

(2)
$$S' = \frac{m}{2}\,\frac{\sin(B, C)}{\alpha \sin(B, I) \sin(C, I)}.$$

Pour interpréter géométriquement ces résultats, remarquons que dans la relation (1) les droites ab_1, ba_1 devenant parallèles, lorsque c est à l'infini,

$$\frac{ab \sin(B, C)}{\sin(B, I)} = a_1 b_1;$$

donc

$$S' = \frac{m}{2}\,\frac{a_1 b_1}{\alpha.\beta}.$$

Ce segment a_1b_1 est la projection du côté ab du triangle sur la droite I, projection faite au moyen de deux droites ac, bc parallèles à une direction arbitraire.

Cette formule servira à transformer l'aire d'un triangle $a'\,b'\,c'$ dont l'un des sommets c' sera sur la droite I'.

Considérons alors dans la première figure un triangle quelconque $a'\,b'\,c'$, et joignons ses sommets à un point o' pris sur la droite I', on aura

$$a'\,b'\,c' = a'\,b'\,o' + b'\,c'\,o' + c'\,a'\,o',$$

de sorte qu'en transformant d'après la relation précédente,

$$\text{(II)}\qquad a'\,b'\,c' = \frac{m}{2}\left(\frac{a_1\,b_1}{\alpha.\beta} + \frac{b_1\,c_1}{\beta.\gamma} + \frac{c_1\,a_1}{\gamma.\alpha}\right).$$

Relativement à la formule (2), remarquons que l'aire du triangle $a\,b_1\,c_1$ est donnée par la relation

$$a\,b_1\,c_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{b_1\,c_1}^2 \sin(B, I)\sin(C, I)}{\sin(B, C)}:$$

or

$$\frac{\sin BI}{\sin BC} = \frac{ac_1}{b_1\,c_1};$$

donc

$$S' = m.\frac{a\,b_1\,c_1}{\alpha^3}.$$

Cette formule servira à transformer un triangle dont un des côtés coïncidera avec la droite I'. Par conséquent, si l'on considère dans la première figure (*) un triangle quelconque $a'\,b'\,c'$, formé par les côtés A', B', C', on aura

$$a'\,b'\,c' = A'\,B'\,I' + B'\,C'\,I' + C'\,A'\,I',$$

$A'\,B'\,I'$ désignant l'aire du triangle formé des côtés A', B', I', etc.

Transformant d'après la dernière formule,

$$\text{(III)}\qquad S' = m\left(\frac{a\,b_1\,c_1}{\alpha^3} + \frac{b\,c_1\,a_1}{\beta^3} + \frac{c\,a_1\,b_1}{\gamma^3}\right).$$

(*) Première figure est toujours celle dont on cherche l'homographie, et les lettres sont accentuées. Tm.

6. Cas particulier. *La droite* I *est à l'infini.* On a

$$a'' = b'' = o,$$

et l'on trouve la relation

$$S' = c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} S.$$

Ainsi dans ce cas le rapport des aires de deux triangles et par conséquent de deux figures homologues est constant. L'une des figures est en effet la projection de l'autre.

7. En comparant les relations (I), (II), (III) on arrive à différentes expressions de l'aire d'un triangle. Ainsi les relations (I) et (III) conduisent à ce théorème :

Si les côtés A, B, C *d'un triangle* abc *sont coupés respectivement en des points* a_1, b_1, c_1 *par une transversale arbitraire, et que l'on désigne par* α, β, γ *les distances des sommets* a, b, c *à cette transversale, l'aire* S *du triangle sera donnée par la relation*

$$S = a\, b_1\, c_1 \frac{\beta\,\gamma}{\alpha^2} + b\, c_1\, a_1 \frac{\gamma\,.\,\alpha}{6^2} + c\, a_1\, b_1 \frac{\alpha\,.\,\beta}{\gamma^2}.$$

Applications.

8. Un polygone $a', b', c', d', \ldots, f'$ étant tracé dans la première figure, joignons un point arbitraire o' à tous ses sommets. L'aire S' de ce polygone est donnée par la relation

$$S' = a'\, b'\, o' + b'\, c'\, o' + c'\, d'\, o' + \ldots + f'\, a'\, o'.$$

Dans la figure homographique nous avons un polygone $a, b, c, d, \ldots, f$ et un point o. D'après la relation (I) nous aurons

$$S' = m \left(\frac{abo}{\alpha\,.\,\beta\,.\,\omega} + \frac{bco}{\beta\,.\,\gamma\,.\,\omega} + \frac{cdo}{\gamma\,.\,\delta\,\omega} + \ldots \right),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \omega$ désignant les distances des sommets $a, b, c,$. et du point o à la droite I.

De là résulte ce théorème :

Si l'on décompose un polygone en triangles, en joignant ses sommets à un point arbitraire de son plan, la somme de ces triangles, divisés respectivement par le produit des distances de leurs sommets à une droite fixe, est une quantité constante.

Le point arbitraire peut être à l'infini ; si l'on appelle $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$ les points d'intersection de la droite fixe I par des droites menées par les sommets $a, b, c, d, \ldots$, parallèlement à une direction arbitraire, on aura, d'après la relation (II),

$$2S' = m\left(\frac{a_1 b_1}{\alpha.\beta} + \frac{b_1 c_1}{\beta.\gamma} + \frac{c_1 d_1}{\gamma.\delta} + \ldots\right).$$

On a donc ce théorème :

Un polygone étant donné ainsi qu'une droite, si l'on projette les côtés de ce polygone sur la droite au moyen de parallèles à une direction arbitraire, la somme des projections des côtés, divisées respectivement par le produit des distances de leurs extrémités à la droite fixe, est une quantité constante.