PAINVIN

Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 370-380

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__370_1>

APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE (*);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

INTRODUCTION.

1. Les coordonnées d'un point de l'espace seront représentées par $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$. Cette notation, qui offre de nombreux avantages, donne à l'équation des surfaces du second ordre la forme suivante d'une fonction quadra-

(*) Ce Mémoire repond à toute question *finitésimale* sur une surface du second ordre, pour une equation decanôme et axes quelconques.
TM.

tique homogène :

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2 + a_{33}\,x_3^2 + a_{44}\,x_4^2 + 2\,a_{12}\,x_1\,x_2 \\ \qquad + 2\,a_{13}\,x_1\,x_3 + 2\,a_{14}\,x_1\,x_4 + 2\,a_{23}\,x_2\,x_3 \\ \qquad + 2a_{24}\,x_2 x_4 + 2a_{34}\,x_3\,x_4 \end{array} \right\} = 0\ (^*);$$

équation qu'on peut écrire symboliquement

$$\varphi = \sum a_{p,q}\,x_p\,x_q = 0,$$

en donnant à p et q simultanément les valeurs 1, 2, 3, 4, et en posant

$$a_{p,q} = a_{q,p}.$$

Il résulte de cette égalité que les rectangles des variables auront 2 pour coefficient.

2. Le principe suivant sera d'une application fréquente:

Soient X_1, X_2, X_3, *trois fonctions linéaires des coordonnées* $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ *d'un certain point* M, *par rapport aux axes* Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; *si l'on prend pour nouveaux axes* $O_1 y_1$, $O_1 y_2$, $O_1 y_3$, *les intersections des trois plans* $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, *qu'on suppose se couper en un seul point, les fonctions* X_1, X_2, X_3 *seront proportionnelles respectivement aux nouvelles coordonnées* y_1, y_2, y_3 *du même point* M.

La démonstration de ce théorème se déduit immédiatement des formules de transformation des coordonnées.

3. Je rappellerai encore quelques notions relatives aux déterminants.

(*) J'ai supprimé la virgule qu'on place ordinairement entre les deux indices de chaque lettre; il n'en résultera, dans le cas actuel, aucune obscurité, et la lecture deviendra plus facile.

Si P représente un déterminant dont les éléments sont $a_{r,s}$, la notation $\frac{dP}{da_{r,s}}$ désignera un déterminant déduit du déterminant P, en supprimant la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne; mais, en outre, $\frac{dP}{da_{r,s}}$ sera la dérivée, par rapport à $a_{r,s}$, du déterminant P, pourvu qu'on affecte le *déterminant déduit* et *non développé* du signe *plus* ou du signe *moins*, suivant que les nombres r et s sont de *même parité* ou de *parité différente*.

De même $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ désignera un déterminant, déduit du déterminant P, en supprimant d'abord la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne, puis la ${r_1}^{ième}$ ligne et la ${s_1}^{ième}$ colonne; mais, en outre, $\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}}$ sera la dérivée de $\frac{dP}{da_{r,s}}$, par rapport à a_{r_1,s_1}. On connaît le signe de ce premier déterminant non développé d'après la règle précédente; on affectera le second *déterminant déduit* et *non développé* du signe *plus* ou du signe *moins*, d'après la règle suivante:

1°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 > r \\ s_1 > s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que $(r_1 - 1)$ et $(s_1 - 1)$ seront de *même parité* ou de *parité différente;*

2°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 > r \\ s_1 < s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que $(r_1 - 1)$ et s_1 seront de *même parité* ou de *parité différente;*

3°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 < r \\ s_1 > s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que r_1 et $(s_1 - 1)$ seront de *même parité* ou de *parité différente;*

4°. Si $\left\{\begin{matrix} r_1 < r \\ s_1 < s \end{matrix}\right\}$, on donnera le signe + ou le signe —, suivant que r_1 et s_1 seront de *même parité* ou de *parité différente.*

On combinera les deux signes ainsi obtenus, d'après la règle usitée des signes, et on aura définitivement le signe dont il faudra affecter le *déterminant déduit, non développé,* pour que $\frac{d^2 P}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}}$ soit la dérivée seconde du déterminant P.

Cette règle se légitimera facilement par les considérations suivantes : $\frac{dP}{da_{r,s}}$ représente un déterminant obtenu en supprimant la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne, affecté du signe + ou —, suivant la *parité* ou la *disparité* du couple (r, s). Pour obtenir $\frac{d^2 P}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}}$, il faudra, dans ce dernier déterminant, supprimer la $r_1{}^{ième}$ ligne et la $s_1{}^{ième}$ colonne; mais pour connaître le *signe* de ce résultat, il sera nécessaire de ramener le déterminant susdit au *type normal*, c'est-à-dire *diminuer de un* tous les *premiers indices* dans les lignes qui suivent la $r^{ième}$ ligne, ainsi que tous les *seconds indices* dans les colonnes qui suivent la $s^{ième}$ colonne. Ce qui conduit immédiatement à la règle que je viens d'énoncer.

Le *type normal* est celui où les indices se suivent dans leur ordre naturel et sans discontinuité.

Il ne faut pas oublier que les signes des différents termes d'un déterminant dépendent du signe du produit des termes de la diagonale qui part du sommet supérieur à gauche du carré, et auquel, suivant l'usage, j'affecterai toujours le signe *plus.*

J'ai insisté sur toutes ces conventions, parce que le signe de ces quantités joue, dans les questions que je vais traiter, un rôle très-important; et il est nécessaire d'éviter toute espèce de confusion.

CHAPITRE PREMIER.

DISCUSSION DES SURFACES DU SECOND ORDRE.

§ I.

Relations d'identité.

4. Avant d'aborder la discussion, j'écrirai les développements de plusieurs expressions et certaines relations d'identité, qui se présenteront fréquemment dans les calculs suivants; j'ai pensé qu'il était utile de réunir toutes ces formules dans un même paragraphe. La plupart de ces relations sont une conséquence immédiate de la formule bien connue

$$P\frac{d^2P}{da_{r,s}\,da_{r_1,s_1}} = \frac{dP}{da_{r,s}}\,\frac{dP}{da_{r_1,s_1}} - \frac{dP}{da_{r,s_1}}\,\frac{dP}{da_{r_1,s}}\ (*).$$

Depuis longtemps M. Terquem était arrivé à ces résultats par une voie différente; et c'est à un travail sur ce sujet, qu'il a eu l'obligeance de me communiquer, que j'ai emprunté les principales formules relatées dans ce paragraphe.

Je désignerai par Δ le *discriminant* de la fonction φ; de sorte que

$$(1)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

ce déterminant, dans lequel

$$a_{r,s} = a_{s,r}$$

est en même temps le déterminant *Hessien* de la fonction φ (**).

(*) BRIOSCHI, *Théorie des déterminants*, p. 13.

(**) Determinant introduit par Otto Hesse $a_{sr} = 2\,\frac{d^2\varphi}{dx_r\,dx_s}$.

On trouve, en développant,

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{44} + a_{12}^2\, a_{34}^2 + a_{23}^2\, a_{41}^2 + a_{13}^2\, a_{24}^2 \\ - a_{11}\, a_{22}\, a_{34}^2 - a_{11}\, a_{33}\, a_{24}^2 - a_{11}\, a_{44}\, a_{23}^2 \\ - a_{22}\, a_{33}\, a_{14}^2 - a_{22}\, a_{44}\, a_{13}^2 - a_{33}\, a_{44}\, a_{12}^2 \\ -2 \left(\begin{array}{r} a_{12}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{41} + a_{12}\, a_{13}\, a_{34}\, a_{42} \\ + a_{13}\, a_{32}\, a_{24}\, a_{41} \end{array} \right) \\ +2 \left(\begin{array}{r} a_{11}\, a_{23}\, a_{34}\, a_{42} + a_{22}\, a_{13}\, a_{34}\, a_{41} + a_{33}\, a_{12}\, a_{24}\, a_{41} \\ + a_{44}\, a_{12}\, a_{23}\, a_{31} \end{array} \right). \end{array} \right.$$

5. Il est important de remarquer que de l'égalité

$$a_{r,s} = a_{s,r},$$

il résulte

$$\frac{d\Delta}{da_{r,s}} = \frac{d\Delta}{da_{s,r}}.$$

Par suite, l'expression $\frac{d\Delta}{da_{r,s}}$ ne représente plus la dérivée effective de Δ.

Cependant, afin de conserver aux formules que je vais écrire un rapport plus intime avec les formules générales qui appartiennent à la théorie des déterminants, les $\frac{d\Delta}{da_{r,s}}$ nous représenteront toujours le déterminant déduit, en supprimant la $r^{ième}$ ligne et la $s^{ième}$ colonne et affecté du signe convenable. Il en sera de même pour les $\frac{d^2\Delta}{da_{r,s}\, da_{r_1,s_1}}$.

D'ailleurs, lorsqu'on voudra passer aux dérivées effectives du premier ordre, il suffira de se rappeler la relation évidente

$$\frac{\mathrm{d}.\Delta}{\mathrm{d}a_{r,s}} = 2\frac{d\Delta}{da_{r,s}};$$

la caractéristique d désignant une dérivée effective.

6. Je donnerai, en premier lieu, les dérivées premières de Δ et plusieurs des dérivées secondes.

Dérivées premières.

$$(2)\left\{\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{da_{11}} &= \delta_{11} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33}\,a_{44} - a_{22}\,a_{34}^2 - \\
\frac{d\Delta}{da_{22}} &= \delta_{22} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{33}\,a_{44} - a_{11}\,a_{34}^2 - \\
\frac{d\Delta}{da_{33}} &= \delta_{33} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{44} - a_{11}\,a_{24}^2 - \\
\frac{d\Delta}{da_{44}} &= \delta_{44} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}^2 -
\end{aligned}\right.$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{d\Delta}{da_{12}} &= \frac{d\Delta}{da_{21}} = \delta_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &- a_{21}\, a_{33}\, a_{44} + a_{21}\, a_{34}^2 \quad - a_{23}\, a_{34}\, a_{41} \\ &+ a_{23}\, a_{31}\, a_{44} - a_{24}\, a_{31}\, a_{43} + a_{24}\, a_{33}\, a_{41}\,; \end{aligned} \right. \\
\frac{d\Delta}{da_{13}} &= \frac{d\Delta}{da_{31}} = \delta_{13} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &- a_{31}\, a_{22}\, a_{44} + a_{31}\, a_{24}^2 \quad - a_{32}\, a_{24}\, a_{41} \\ &+ a_{32}\, a_{21}\, a_{44} - a_{34}\, a_{21}\, a_{42} + a_{34}\, a_{22}\, a_{41}\,; \end{aligned} \right. \\
\frac{d\Delta}{da_{14}} &= \frac{d\Delta}{da_{41}} = \delta_{14} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &- a_{41}\, a_{22}\, a_{33} + a_{41}\, a_{23}^2 \quad - a_{42}\, a_{23}\, a_{31} \\ &+ a_{42}\, a_{21}\, a_{33} - a_{43}\, a_{21}\, a_{32} + a_{43}\, a_{22}\, a_{31}\,; \end{aligned} \right. \\
\frac{d\Delta}{da_{23}} &= \frac{d\Delta}{da_{32}} = \delta_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &- a_{32}\, a_{11}\, a_{44} + a_{32}\, a_{14}^2 \quad - a_{31}\, a_{14}\, a_{42} \\ &+ a_{31}\, a_{12}\, a_{44} - a_{34}\, a_{12}\, a_{41} + a_{34}\, a_{11}\, a_{42}\,; \end{aligned} \right. \\
\frac{d\Delta}{da_{24}} &= \frac{d\Delta}{da_{42}} = \delta_{24} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &- a_{42}\, a_{11}\, a_{33} + a_{42}\, a_{13}^2 \quad - a_{41}\, a_{13}\, a_{32} \\ &+ a_{41}\, a_{12}\, a_{33} - a_{43}\, a_{12}\, a_{31} + a_{43}\, a_{11}\, a_{32}\,; \end{aligned} \right. \\
\frac{d\Delta}{da_{34}} &= \frac{d\Delta}{da_{43}} = \delta_{34} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &- a_{43}\, a_{11}\, a_{22} + a_{43}\, a_{12}^2 \quad - a_{41}\, a_{12}\, a_{23} \\ &+ a_{41}\, a_{13}\, a_{22} - a_{42}\, a_{13}\, a_{21} + a_{42}\, a_{11}\, a_{23}\,. \end{aligned} \right. \\
& \qquad\qquad \delta_{r,s} = \delta_{s,r}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dérivées secondes.

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{22}} &= p_{12} = +\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{33}\,a_{44} - a_{34}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{33}} &= p_{13} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{44} - a_{24}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{44}} &= p_{14} = +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}\,a_{33} - a_{23}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{33}} &= p_{23} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{44} - a_{14}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{44}} &= p_{24} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{33} - a_{13}^2,\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{44}} &= p_{34} = +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2.\\
&\qquad\qquad p_{r,s} = p_{s,r}.
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{34}} &= r_{13} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = -\,a_{11}\,a_{43} + a_{13}\,a_{41},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{24}} &= r_{13} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = -\,a_{11}\,a_{42} + a_{12}\,a_{41},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{23}} &= r_{14} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\,a_{11}\,a_{32} + a_{12}\,a_{31},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{14}} &= r_{23} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} = -\,a_{22}\,a_{41} + a_{21}\,a_{42},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{13}} &= r_{24} = +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\,a_{22}\,a_{31} + a_{21}\,a_{32},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{44}\,da_{12}} &= r_{34} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\,a_{33}\,a_{21} + a_{31}\,a_{23}.
\end{aligned}\right.$$

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{34}} &= r_{21} = -\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{22}a_{43} + a_{23}a_{42},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{24}} &= r_{31} = +\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{33}a_{42} + a_{32}a_{43},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{11}\,da_{23}} &= r_{41} = -\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{44}a_{32} + a_{42}a_{34},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{14}} &= r_{32} = +\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} = -a_{33}a_{41} + a_{31}a_{43},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{22}\,da_{13}} &= r_{42} = -\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{44}a_{31} + a_{41}a_{34},\\
\frac{d^2\Delta}{da_{33}\,da_{12}} &= r_{43} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{24} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} = -a_{44}a_{21} + a_{41}a_{24}.
\end{aligned}\right.
$$

7. Passons maintenant aux relations d'identité :

$$
(5)\left\{\begin{aligned}
\Delta p_{34} &= \delta_{33}\delta_{44} - \delta^2_{34},\\
\Delta p_{24} &= \delta_{22}\delta_{44} - \delta^2_{24},\\
\Delta p_{14} &= \delta_{11}\delta_{44} - \delta^2_{14},\\
\Delta p_{23} &= \delta_{22}\delta_{22} - \delta^2_{23},\\
\Delta p_{13} &= \delta_{11}\delta_{33} - \delta^2_{13},\\
\Delta p_{12} &= \delta_{11}\delta_{\ 2} - \delta^2_{12}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
(6)\left\{\begin{aligned}
\Delta r_{34} &= \delta_{44}\delta_{12} - \delta_{24}\delta_{14},\\
\Delta r_{24} &= \delta_{44}\delta_{13} - \delta_{34}\delta_{14},\\
\Delta r_{14} &= \delta_{44}\delta_{23} - \delta_{34}\delta_{24}.\\
\Delta r_{43} &= \delta_{33}\delta_{12} - \delta_{23}\delta_{13},\\
\Delta r_{23} &= \delta_{33}\delta_{14} - \delta_{34}\delta_{13},\\
\Delta r_{13} &= \delta_{33}\delta_{24} - \delta_{34}\delta_{23}.\\
\Delta r_{42} &= \delta_{22}\delta_{13} - \delta_{23}\delta_{12},\\
\Delta r_{32} &= \delta_{22}\delta_{14} - \delta_{24}\delta_{12},\\
\Delta r_{12} &= \delta_{22}\delta_{34} - \delta_{24}\delta_{32}.\\
\Delta r_{41} &= \delta_{11}\delta_{23} - \delta_{13}\delta_{12},\\
\Delta r_{31} &= \delta_{11}\delta_{24} - \delta_{14}\delta_{1\ },\\
\Delta r_{21} &= \delta_{11}\delta_{34} - \delta_{14}\delta_{13}.
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\delta_{44}\,a_{11} = p_{24}\,p_{34} - r^2_{14}, && \delta_{44}\,a_{22} = p_{14}\,p_{34} - r^2_{24},\\
&\delta_{33}\,a_{11} = p_{23}\,p_{34} - r^2_{13}, && \delta_{33}\,a_{22} = p_{13}\,p_{34} - r^2_{23},\\
&\delta_{22}\,a_{11} = p_{23}\,p_{24} - r^2_{12}, && \delta_{11}\,a_{22} = p_{13}\,p_{14} - r^2_{21},\\
&\delta_{44}\,a_{33} = p_{14}\,p_{24} - r^2_{34}, && \delta_{33}\,a_{44} = p_{13}\,p_{23} - r^2_{43},\\
&\delta_{22}\,a_{33} = p_{12}\,p_{24} - r^2_{32}, && \delta_{22}\,a_{44} = p_{12}\,p_{23} - r^2_{42},\\
&\delta_{11}\,a_{33} = p_{12}\,p_{14} - r^2_{31}. && \delta_{11}\,a_{44} = p_{12}\,p_{13} - r^2_{41}.
\end{aligned}
\right. \tag{7}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\delta_{44}\,a_{12} = r_{14}\,r_{24} - r_{34}\,p_{34}, && \delta_{33}\,a_{12} = r_{13}\,r_{23} - r_{43}\,p_{34},\\
&\delta_{44}\,a_{13} = r_{14}\,r_{34} - r_{24}\,p_{24}, && \delta_{33}\,a_{14} = r_{13}\,r_{43} - r_{23}\,p_{23},\\
&\delta_{44}\,a_{23} = r_{34}\,r_{24} - r_{14}\,p_{14}, && \delta_{33}\,a_{24} = r_{43}\,r_{23} - r_{13}\,p_{13},\\
&\delta_{22}\,a_{13} = r_{12}\,r_{32} - r_{42}\,p_{24}, && \delta_{11}\,a_{23} = r_{21}\,r_{31} - r_{41}\,p_{14},\\
&\delta_{22}\,a_{14} = r_{12}\,r_{42} - r_{32}\,p_{23}, && \delta_{11}\,a_{24} = r_{21}\,r_{41} - r_{31}\,p_{13},\\
&\delta_{22}\,a_{34} = r_{42}\,r_{32} - r_{12}\,p_{12}. && \delta_{11}\,a_{34} = r_{31}\,r_{41} - r_{21}\,p_{12}.
\end{aligned}
\right. \tag{8}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\delta_{34}\,a_{11} = r_{14}\,r_{13} + r_{12}\,p_{34}, && \delta_{34}\,a_{22} = r_{24}\,r_{23} + r_{21}\,p_{34},\\
&\delta_{24}\,a_{11} = r_{14}\,r_{12} + r_{13}\,p_{24}, && \delta_{14}\,a_{22} = r_{24}\,r_{21} + r_{23}\,p_{14},\\
&\delta_{23}\,a_{11} = r_{13}\,r_{12} + r_{14}\,p_{23}, && \delta_{13}\,a_{22} = r_{23}\,r_{21} + r_{24}\,p_{13},\\
&\delta_{24}\,a_{33} = r_{34}\,r_{32} + r_{31}\,p_{24}, && \delta_{23}\,a_{44} = r_{43}\,r_{42} + r_{41}\,p_{23},\\
&\delta_{14}\,a_{33} = r_{34}\,r_{31} + r_{32}\,p_{14}, && \delta_{13}\,a_{44} = r_{43}\,r_{41} + r_{42}\,p_{13},\\
&\delta_{12}\,a_{33} = r_{32}\,r_{31} + r_{34}\,p_{12}, && \delta_{12}\,a_{44} = r_{42}\,r_{41} + r_{43}\,p_{12},
\end{aligned}
\right. \tag{9}
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&a^2_{11}\,\Delta = p_{24}p_{34}p_{23} - p_{34}r^2_{12} - p_{24}r^2_{13} - p_{23}r^2_{14} - 2r_{12}r_{13}r_{14},\\
&a^2_{22}\,\Delta = p_{14}p_{34}p_{13} - p_{34}r^2_{21} - p_{14}r^2_{23} - p_{13}r^2_{24} - 2r_{21}r_{23}r_{24}.\\
&a^2_{33}\,\Delta = p_{14}p_{24}p_{12} - p_{24}r^2_{31} - p_{14}r^2_{32} - p_{12}r^2_{34} - 2r_{31}r_{32}r_{34},\\
&a^2_{44}\,\Delta = p_{13}p_{23}p_{12} - p_{23}r^2_{41} - p_{13}r^2_{42} - p_{12}r^2_{43} - 2r_{41}r_{42}r_{43}.
\end{aligned}
\right. \tag{10}
$$

On pourrait encore établir d'autres relations analogues à celles que je viens de signaler ; mais celles-ci nous suffisent pour l'étude que j'ai en vue ; elles sont même surabondantes. Cependant j'ai cru devoir les donner, parce qu'elles peuvent être d'un grand secours dans d'autres recherches sur les surfaces du second ordre.

La suite prochainement.