Nouvelles annales de mathématiques

Généralisation du théorème de Newton sur le quadrilatère inscrit dans une conique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 368-370

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__368_0>

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE NEWTON SUR LE QUADRILATÈRE INSCRIT DANS UNE CONIQUE.

1. Théorème. *Soient deux systèmes chacun de* n *plans; ces deux systèmes se coupent en* n^2 *droites par lesquelles passent une infinité de surfaces de degré* n; *chacune de ces surfaces jouit de cette propriété : le produit des distances d'un point quelconque de cette surface à l'un des systèmes de plans est au produit des distances du même point à l'autre système de plans dans un rapport constant.*

Démonstration. Soient

$$A_p = a$$

l'équation d'un plan quelconque du premier système, et

$$B_p = o$$

l'équation d'un plan quelconque du second système; la surface représentée par l'équation

$$(1) \qquad A_1 A_2 A_3 \ldots A_n + \lambda B_1 B_2 \ldots B_n = o,$$

où λ étant une constante arbitraire, est une surface de degré n et passant par les n^2 droites d'intersection du système A avec le système B. Soit α_p la distance perpendiculaire d'un point de cette surface au plan A_p et β_p au plan B_p; d'après l'expression connue de ces distances, on a

$$\alpha \ \alpha_2 \ldots \alpha_n + \lambda \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n = o.$$

Observation. L'équation (1) renferme $8n$ constantes,

λ comprise; une surface de degré n renferme $\frac{n^3+6n^2+11n}{6}$ constantes. On peut donc identifier cette équation avec l'équation (1) tant que n est inférieur à 5, identification purement *analytique* pour $n=2$ et $n=4$ lorsque ces surfaces ne renferment pas de droites; mais les surfaces du deuxième et du quatrième degré qui contiennent des droites peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$A_1 A_2 + \lambda B_1 B_2 = 0, \quad A_1 A_2 A_3 A_4 + \lambda B_1 B_2 B_3 B_4 = 0,$$

et une surface *quelconque* du troisième degré peut se mettre sous la forme

$$A_1 A_2 A_3 + \lambda B_1 B_2 B_3 = 0;$$

ces surfaces possèdent donc la propriété *des distances*, ci-dessus énoncée, et l'on peut en déduire les principales propriétés.

2. Théorème. *Soient donnés dans un plan deux systèmes, chacun de* n *droites; ces deux systèmes se coupent en* n^2 *points par lesquels passent une infinité de lignes de degré* n; *chacune de ces lignes jouit de cette propriété : le produit des distances d'un point quelconque de cette ligne à l'un des systèmes de droites est au produit des distances du même point à l'autre système dans un rapport constant.*

Même démonstration.

Observation. L'équation (1) où les A et les B représentent des droites contient $6n$ constantes. Une ligne de degré n renferme $\frac{n^2+3n}{2}$ constantes. Aussi on peut opérer *analytiquement* l'identification pour n inférieur à 10.

Faisant $n=2$, on a la propriété des *distances* pour le quadrilatère inscrit dans le quadrilatère; théorème fondamental de Newton dont la constance du *rapport anharmonique* de M. Chasles n'est qu'une simple transformation (t. XVI, p. 220); mais l'énoncé de Newton présente l'avantage de pouvoir être généralisé.

3. Par des transformations métriques du théorème de Newton, M. le capitaine Faure parvient à celui-ci :

Un quadrilatère étant circonscrit à une conique, le produit des distances des deux sommets opposés à une cinquième tangente quelconque, divisé par le produit des distances des deux autres sommets à la même tangente, donne un quotient constant.