Questions

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 358-360

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__358_1>

QUESTIONS.

446. Joignons par une droite les centres des cercles inscrit et circonscrit à un triangle; cette droite rencontre le cercle inscrit en deux points; soient s et s' les *puissances* de ces points relativement au cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit, R le rayon du cercle circonscrit, on a la relation

$$ss' = r^3 (4\mathrm{R} + r).$$

Note. La *puissance* d'un point par rapport à un cercle est le produit des segments de la sécante ou de la corde menée par ce point; expression introduite par Steiner, le célèbre géomètre, Euclide moderne de l'Allemagne (*).

447. Soient

$$x_1 = p^{\frac{1}{2}},$$

$$x_2 = \left(p + \sqrt{p_2 + q x_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(p + \sqrt{p_2 + q x_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \left(p + \sqrt{p^2 + q x_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

(*) La Prusse possède de grands géomètres qu'elle rémunère petitement. Jacobi voulait échanger Berlin contre Vienne; Dirichlet a fait cet échange contre Göttingue, et Steiner contre la Suisse, son pays natal.

p et q sont supérieurs à zéro; démontrer que :

1°. Les termes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ vont en croissant;

2°. $x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ est une quantité positive;

3°. $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-2}$ n'est pas inférieure à $\frac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}}$;

4°. $x^n - x^{n-1} < \frac{1}{2^{2n-2\frac{1}{4}}}\left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}}$.

(GRUNERT.)

448. Soient A et B les extrémités du grand axe $2a$ d'une ellipse, C le centre; O un point fixe dans le plan de l'ellipse, et $OC = d$; inscrivons dans l'ellipse un polygone de $2n$ côtés, projection d'un polygone régulier inscrit dans le cercle dont l'ellipse est la projection orthogonale; A et B étant deux sommets opposés, menons du point O des rayons successifs $r_1, r_2, r_3, \ldots r_{2n}$, et par le centre des demi-diamètres $R_1, R_2, \ldots, R_{2n}$ respectivement parallèles à ces rayons, on a les deux relations

$$\frac{r_1}{R_1} \cdot \frac{r_3}{R_3} \cdot \frac{r_5}{R_5} \cdot \frac{r_{2n-1}}{R_{2n-1}} = \pm\left(1 + \frac{d}{a}\right)^n,$$

$$\frac{r_2}{R_2} \cdot \frac{r_4}{R_4} \cdot \frac{r_6}{R_6} \cdot \frac{r_{2n}}{R_{2n}} = \pm\left(1 - \frac{d}{a}\right)^n,$$

le signe supérieur lorsque le point O est dans l'intérieur, et le signe inférieur lorsque le point est extérieur.

449. Soit l'équation

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 la somme des puissances 0, 1, 2, 3, 4 des racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$,

Si l'on a l'une ou l'autre de ces deux relations

$$ae^2 - 4bd + 3c^2 = 0,$$

et

$$\begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ s_2, & s_3, & s_4 \end{vmatrix} = 0,$$

alors

$$\sum \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} = 0.$$

(Michael Strebor.)

450. Une droite est donnée par ses deux projections qui se rencontrent en un même point de la ligne de terre; mener par la droite un plan tel, que ses deux traces, étant relevées, forment un angle bissecté par la droite donnée. (Solution graphique.)

451. Une hyperbole équilatère homofocale à une ellipse intercepte sur les côtés d'un angle droit circonscrit à l'ellipse deux cordes égales. (Mannheim.)