

Solution de la question 287 (Bellavitis)

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 354-356

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__354_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 287 (BELLAVITIS)

(VOIR t. XIII, p. 192).

PAR UN ANONYME.

Si l'on divise d'une manière *quelconque* un polyèdre homogène en tétraèdres et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, le centre de gravité de ce système de points matériels est toujours le même.

J'appelle $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ les sommets du polyèdre, $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots, (a_n, b_n, c_n)$ les coordonnées de ces points relativement à trois axes rectangulaires issus d'un point arbitraire O . Je divise la surface du polyèdre en triangles et je joins leurs sommets à un point quelconque M de l'espace, j'aurai ainsi une des décompositions exigées par la question. Considérant en particulier la pyramide triangulaire $MA_1 A_2 A_3$, dont le sommet M a pour coordonnées x, y, z , on a les trois équations

$$(a_1 - x)\alpha + (b_1 - y)\beta + (c_1 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_1^2 - OM^2),$$

$$(a_2 - x)\alpha + (b_2 - y)\beta + (c_2 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_2^2 - OM^2),$$

$$(a_3 - x)\alpha + (b_3 - y)\beta + (c_3 - z)\gamma = \frac{1}{2}(OA_3^2 - OM^2),$$

pour exprimer que le point α , β , γ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre dont il s'agit. Résolvant ces équations, on en tire pour z , par exemple, une valeur

$$z = \frac{N}{D},$$

dans laquelle

$$D = 2 \cdot \det. \begin{Bmatrix} a_1 - x, & b_1 - y, & c_1 - z \\ a_2 - x, & b_2 - y, & c_2 - z \\ a_3 - x, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix},$$

$$N = \det. \begin{Bmatrix} OA_1^2 - OM^2, & b_1 - y, & c_1 - z \\ OA_2^2 - OM^2, & b_2 - y, & c_2 - z \\ OA_3^2 - OM^2, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix}.$$

Or la quantité D est proportionnelle à la masse du tétraèdre, donc N sera à un facteur constant près le moment du point matériel considéré relativement au plan des yz . Agissant de la même manière pour chaque tétraèdre, nous aurons une somme de moments $\sum N$, qui, divisée par le volume V du polyèdre, donnera l'abscisse du centre de gravité de tous nos points. Il est manifeste que la somme $\sum N$ est constante : car

$$12V = \sum D = \sum \det. \begin{Bmatrix} a_1 - x, & b_1 - y, & c_1 - z \\ a_2 - x, & b_2 - y, & c_2 - z \\ a_3 - x, & b_3 - y, & c_3 - z \end{Bmatrix},$$

et cette expression se réduit à

$$12V = \sum \det. \begin{Bmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{Bmatrix},$$

en plaçant l'origine des coordonnées au point M . Mais en

même temps il faut que la somme $\sum N$ se réduise à

$$\sum N = \sum \det. \begin{pmatrix} OA_1^2 & b_1 & c_1 \\ OA_2^2 & b_2 & c_2 \\ OA_3^2 & b_3 & c_3 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire à une quantité constante.