NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Questions d'examen (École navale)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 351-354

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__351_1>

QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

1. *Considérez sur une circonférence* (*) m *points* A_0, A_1, A_2, ..., A_{m-1}, *divisant cette courbe en* m *parties quelconques, et supposez qu'à partir de l'un d'eux, de* A_0 *par exemple, on conduise consécutivement des cordes qui unissent ces points de* n *en* n ; *de sorte que la première de ces droites soit menée de* A_0 *au point* A_n ; *la seconde, de* A_n *au point* A_{2n}, *et ainsi de suite, chacune d'elles sous-tendant* n *des parties en lesquelles la circonférence est divisée : pour que l'on passe ainsi par tous les points de division, il faut et il suffit que les deux*

(*) Et plus generalement sur une courbe fermee.

nombres m *et* n *soient premiers entre eux*. C'est ce qu'on propose de démontrer.

Quels que soient les deux nombres entiers m et n, la construction indiquée ramènera au point de départ A_0. En effet, désignons par m' et n' les quotients obtenus en divisant m et n par leur plus grand commun diviseur, on aura

$$n.m' = m.n',$$

puisque chacun des produits nm', mn' représente le plus petit multiple de m et de n. Or, l'égalité $nm' = mn'$ montre que si l'on conduit consécutivement m' cordes sous-tendant chacune n des divisions de la circonférence, la somme de tous les arcs qu'elles sous-tendent est égale à un nombre entier n' de circonférences ; par conséquent, la dernière aboutira au point d'où on est parti.

Si, généralement, on nomme x le nombre des cordes à mener pour revenir au point de départ, et y le nombre entier de circonférences dont se compose la somme des arcs sous-tendus par ces cordes, on aura $nx = my$, d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

Les nombres m', n' étant premiers entre eux, x et y seront des équimultiples de ces nombres, donc le *minimum de* x *est* m'.

De là nous concluons qu'en menant à partir du point A_0 un nombre de cordes égal à m', on revient à ce point, sans passer plus d'une fois par l'un quelconque des autres A_1, A_2, etc. Il en résulte que ces cordes unissent entre eux m' points distincts. Il est d'ailleurs évident que lorsqu'on est revenu au point de départ A_0, la construction indiquée ne peut donner aucune corde nouvelle, donc le nombre de points par lesquels on passe en suivant cette construction est précisément m'.

Pour que $m' = m$, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de m et n soit l'unité, c'est-à-dire que les deux nombres m et n soient premiers entre eux. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer.

Note. La question que nous venons de traiter est au nombre de celles qui ont été jadis plusieurs fois proposées dans les examens d'admission à l'École Polytechnique, afin de bien apprécier la *spontanéité* des candidats (*voir* t. VIII, p. 68).

2. *On a les groupes*

$$\begin{array}{l} 1; \\ 3,\ 5; \\ 7,\ 9,\ 11; \\ 13,\ 15,\ 17,\ 19; \end{array}$$

et ainsi de suite :

Prouver que la somme des nombres contenus dans chacun d'eux est un cube (*).

Le nombre des termes contenus dans les n premiers groupes est $\frac{n(n+1)}{2}$. Et, comme ces termes sont les nombres impairs consécutifs 1, 3, 5, etc., leur somme a pour valeur $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. On a, de même, en additionnant tous les termes des $(n+1)$ premiers groupes, $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Donc *la somme des nombres contenus dans le* $(n+1)^{\text{ième}}$ est

$$\frac{(n+1)^2(n+2)^2 - n^2(n+1)^2}{4}$$

(*) Cet énonce m'a été communiqué par un candidat à l'Ecole Navale; je n'y change rien.

ou

$$\frac{(n+1)^2(4n+4)}{4},$$

expression qui se réduit évidemment à $(n+1)^3$.

G.