NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

SAUZE

Sur les courbes et les surfaces du second ordre, extension du théorème de M. Dandelin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 33-43

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__33_1>

SUR LES COURBES ET LES SURFACES DU SECOND ORDRE,

Extension du théorème de M. Dandelin;

PAR M. L'ABBÉ SAUZE,
(Maison ecclésiastique de Vals).

1. Le théorème de M. Dandelin est universellement connu. Il consiste en ce que :

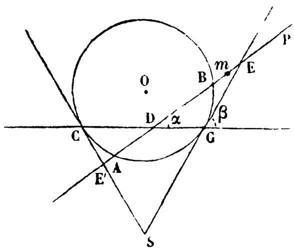
1°. Si dans un cône circulaire droit on inscrit une sphère suivant un parallèle, tout plan tangent à la sphère en un point F et rencontrant suivant une droite D le plan du parallèle, déterminera dans le cône une *section conique* dont F sera le foyer et D la directrice.

2°. Si dans un cône circulaire droit on inscrit deux sphères, tout plan tangent à ces sphères aux points F, F', déterminera dans la surface conique une section dont F, F' seront les foyers.

Nous nous proposons de démontrer que ce théorème n'est point particulier au cône, mais qu'il s'étend à plusieurs des autres surfaces de révolution du second degré. Posons d'abord quelques préliminaires.

2. Soit un cône S et une sphère O inscrite suivant un parallèle CG. Les génératrices du cône forment avec le

FIG. 1.



plan de CG un angle constant β. En appelant MT la tangente menée à la sphère par un point M pris sur le cône et MN la distance de ce même point au plan CG, il est aisé de voir que l'on a

$$\frac{MT}{MN} = \frac{1}{\sin\beta}.$$

Coupons maintenant le système entier par un plan P faisant un angle α avec le plan CG, et mené de telle sorte que son intersection D avec CG passe dans l'intérieur du cône. Ce plan P déterminera dans le cône une conique EE', dans la sphère un cercle AB tangent intérieurement à la conique en deux points symétriques par rapport au grand axe, enfin dans le plan CG la droite D qui passera par les deux points de contact.

Maintenant si l'on appelle mt la tangente menée au cercle AB par un point m pris sur la section EE' et md la perpendiculaire abaissée de m sur la droite D, il est aisé de voir que l'on aura

$$\frac{mt}{md\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\beta}, \quad \frac{mt}{md} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Ce rapport $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ est, comme on peut le voir encore, le rapport $\frac{c}{a}$ de la conique.

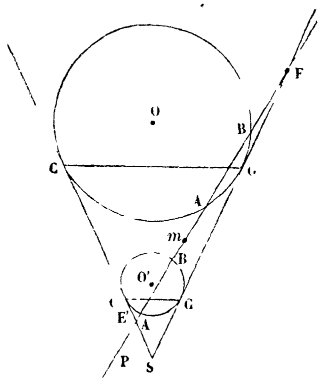
On pourra donc énoncer ce théorème :

Si dans l'intérieur d'une conique on inscrit un cercle ayant son centre sur un axe principal (*), *et si par les deux points de contact on tire une droite, la tangente menée au cercle par un point de la conique et la perpendiculaire abaissée de ce point sur la droite seront dans un rapport constant et égal au rapport* $\frac{c}{a}$ *de la conique.*

3. Soit maintenant le cône S et les deux sphères OO′ inscrites suivant les parallèles CG, C′G′. En appelant 2S la distance CC′ comprise entre les points de contact des sphères avec une des génératrices du cône, MT, MT′ les tangentes menées à ces sphères par un point M du cône, on a évidemment pour tout point pris entre les deux parallèles

$$MT + MT' = 2S.$$

FIG. 2.



(*) Focal

Pour tout point pris en dehors du côté de l'un des cercles, de $C'G'$ par exemple,

$$MT - MT' = 2S,$$

et l'on peut définir le cône S le lieu des points dont les tangentes aux deux sphères O et O' ont leur somme ou leur différence égale à la constante $2S$.

Coupons maintenant le système entier par un plan P qui détermine dans le cône la conique EE' et dans les sphères les cercles AB, $A'B'$ tangents intérieurement à la conique. En appelant mt, mt' les tangentes menées aux deux cercles par un point m pris sur la conique, on aura

$$mt + mt' = 2S;$$

lorsque m sera pris entre les deux cercles

$$mt - mt' = 2S, \quad \text{ou} \quad mt' - mt = 2S$$

dans le cas contraire. On obtiendra ainsi ce théorème :

Deux cercles étant inscrits à une conique et ayant leurs centres sur son axe principal, pour un point quelconque pris sur la courbe, la somme ou la différence $2S$ *des tangentes aux deux cercles est constante.*

On remarquera encore qu'en appelant α l'angle du plan P avec l'un des plans CG, $C'G'$, β celui des génératrices du cône avec les mêmes plans et $2l$ la distance entre les centres des deux cercles AB, $A'B'$, on a

$$\frac{2l}{2S} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c}{a}.$$

4. Ces propriétés dont jouissent ainsi les cercles inscrits dans les coniques sont analogues à celles des foyers. Nous pourrions démontrer qu'elles se retrouvent encore dans un grand nombre d'autres cercles. L'ensemble de ces cercles constitue une série ou suite à laquelle les premiers appartiennent, et qui comprend même les foyers comme

cercles dont le rayon est égal à zéro. Nous avons dû négliger certains détails assez intéressants, mais qui nous auraient menés trop loin.

On remarquera que les cercles osculateurs aux sommets du grand axe dans une conique peuvent être considérés comme cercles doublement tangents à la courbe, et comme tels, jouissent des propriétés ci-dessus mentionnées.

Cette observation nous conduit à cette autre :

Une sphere étant inscrite dans un cône, si l'on coupe le système par un plan mené suivant une tangente au parallèle de contact, ce plan détermine dans la sphère un cercle qui est osculateur au sommet de la courbe déterminée dans le cône.

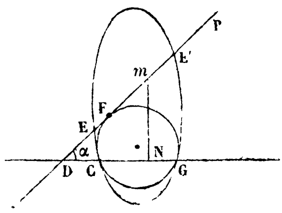
5. Ces préliminaires posés, nous allons voir comment le théorème de M. Dandelin s'étend aux surfaces du second degré et de révolution, autres que le cône ou le cylindre qui en est un cas particulier.

Ces surfaces sont au nombre de cinq, savoir : l'ellipsoïde allongé, le paraboloïde, l'hyperboloïde à deux nappes, l'hyperboloïde à une nappe et l'ellipsoïde aplati.

Les trois premières sont engendrées par le mouvement d'une conique autour de l'axe qui contient ses foyers. Les dernières proviennent de la révolution d'une ellipse ou d'une hyperbole autour de leur axe secondaire.

Considérons une des trois premières, ellipsoïde allongé, hyperboloïde à deux nappes ou paraboloïde. Supposons

Fig. 3.



qu'à cette surface on ait inscrit une sphère et qu'on ait mené un plan CG suivant le parallèle de contact. Cette surface pourra se définir le lieu des points tels, que la tangente MT menée à la sphère par un de ces points soit dans un rapport constant avec la distance MN du même point au plan du parallèle de contact,

$$\frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{MN}} = \frac{c}{a},$$

c et a étant des éléments de la conique génératrice.

Cela posé, concevons un plan P tangent à la sphère en un point F coupant la surface suivant une courbe EE′ et le plan CG du parallèle suivant une droite D. Soit α l'angle formé par les plans P et CG. Pour un point m pris sur la section, la ligne $m\mathrm{F}$ est une des tangentes à la sphère. En appelant $m\mathrm{N}$ la perpendiculaire abaissée de m sur le plan CG, on a

$$\frac{m\mathrm{F}}{m\mathrm{N}} = \frac{c}{a}.$$

D'ailleurs on a aussi

$$m\mathrm{N} = md \sin\alpha,$$

md étant la distance de m à l'intersection D; donc

$$\frac{m\mathrm{F}}{md} = \frac{c}{a} \sin\alpha.$$

La courbe EE′ est une conique. F en est le foyer, D la directrice, et le rapport de son excentricité à son grand axe est égal à $\frac{c}{a}\sin\alpha$.

Au lieu de toucher la sphère, le plan pourrait la couper de façon que le cercle de section fût tangent en deux points à la courbe déterminée dans la surface. Dès lors on aurait un système du genre de ceux que nous a déjà fournis le cône.

6. Soient encore l'une des surfaces mentionnées et deux sphères inscrites. La somme ou la différence $2S$ des tangentes menées aux deux sphères d'un point quelconque de la surface est constante et telle, que

$$\frac{2l}{2S} = \frac{c}{a},$$

$2l$ étant la distance entre les centres des deux sphères. Si l'on coupe cette surface par un plan tangent aux sphères en deux points F, F', les distances mF, mF' d'un point de la section aux deux points de contact donneront encore

$$mF \pm mF' = 2S.$$

La courbe sera encore une conique, F, F' en seront les foyers.

Hyperboloïde à une nappe.

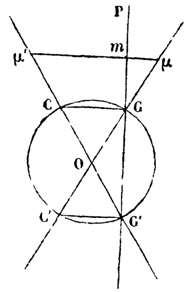
7. L'hyperboloïde à une nappe se définit quelquefois comme la surface engendrée par le mouvement d'une droite autour d'un axe fixe. Le théorème de M. Dandelin s'y applique alors sans difficulté. Les raisonnements à faire sont absolument les mêmes que pour le cône; c'est pourquoi nous ne nous y arrêterons pas.

Lorsque, au contraire, on part d'abord de l'idée que cette surface est produite par la révolution d'une hyperbole, on revient au cas précédent en démontrant qu'elle admet aussi un système de génératrices rectilignes. Voici une méthode que l'on peut suivre.

Nous démontrons d'abord que, un cercle étant construit sur l'axe transverse d'une hyperbole comme diamètre, la tangente au cercle menée d'un point quelconque de la courbe est dans un rapport constant avec la distance du même point à l'axe transverse.

Soit le point O servant à la fois de sommet à un cône et de centre à une sphère. Soit r le rayon de cette sphère,

FIG. 4



β l'angle des génératrices du cône avec un plan perpendiculaire à l'axe ; CG, C′G′ deux cercles parallèles suivant lesquels la sphère coupe le cône.

Menons un plan P qui coupe le cône suivant une hyperbole et la sphère suivant un cercle, de telle façon que celui-ci ait pour diamètre l'axe transverse de celle-là. (La figure représente comme les précédentes la section du système entier par un plan mené suivant l'axe du cône perpendiculairement au plan coupant P).

La distance MN d'un point M pris sur l'hyperbole à l'axe transverse de cette courbe nous est donnée par l'expression $\sqrt{mp \,.\, mp'}$.

(mp, mp' sont deux segments déterminés par m sur la parallèle pp' menée dans notre figure aux droites CG, C′G′, m est la projection de M sur le plan de la figure.) La tangente MT menée de M au cercle GG′ ou à la sphère O est égale à

$$\sqrt{(\mathrm{MO}+r)(\mathrm{MO}-r)} \quad \text{ou} \quad \sqrt{p\mathrm{C}' . p\mathrm{G}}$$

(en employant les segments pC', pG de notre figure).

Or

$$mp = pG \cos\beta, \quad mp' = pC' \cos\beta,$$

donc

$$\frac{\sqrt{pG \,.\, pC'}\cos\beta}{\sqrt{mp \,.\, mp'}} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{MT}{MN} = \frac{1}{\cos\beta}.$$

Donc, *un cercle ayant pour diamètre l'axe transverse d'une hyperbole, la tangente menée au cercle d'un point quelconque de la courbe et la distance du même point à l'axe transverse sont dans un rapport constant.*

Ce rapport est, comme on pourra le voir aisément, égal à $\frac{c}{b} > 1$.

Par suite, une sphère étant inscrite à l'hyperboloïde à une nappe suivant le cercle de gorge, la tangente à la sphère menée d'un point quelconque de la surface et la distance du même point au plan du cercle de contact sont dans un rapport constant plus grand que 1.

8. Il nous est facile maintenant de faire voir que l'hyperboloïde peut être engendré par le mouvement d'une droite.

En effet, que par un point pris sur le cercle de gorge on mène à la sphère inscrite suivant ce cercle une tangente faisant avec le plan du cercle un angle δ tel, que

$$\frac{1}{\sin\delta} = \frac{c}{b}$$

(c et b étant des éléments de l'hyperbole génératrice), en appelant MT une tangente à la sphère, MN une perpendiculaire au plan, menées toutes deux d'un point M pris sur la droite, on aura

$$\frac{MT}{MN} = \frac{1}{\sin\delta} = \frac{c}{b},$$

d'où il suit que le point M et la droite tout entière appartiennent à la surface.

Les deux énoncés qui suivent, relatifs à l'hyperbole, se déduisent facilement de ce qui vient d'être dit sur l'hyperboloïde.

1°. *Un cercle étant inscrit dans une hyperbole de façon que son centre soit situé en un point quelconque de l'axe imaginaire, la tangente au cercle menée d'un point de la courbe et la perpendiculaire à la corde de contact sont dans un rapport constant.*

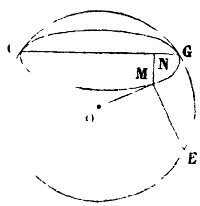
2°. *Deux cercles étant inscrits à une hyperbole et ayant leurs centres situés sur l'axe non transverse, la somme ou la différence des tangentes menées à ces cercles par un point quelconque de la courbe est égale à une constante.*

Ellipsoïde aplati.

9. L'ellipsoïde aplati diffère particulièrement des surfaces précédentes. Une sphère tangente à celle-ci suivant un parallèle la contient tout entière. Un plan tangent à la sphère ne peut donc couper la surface. Ainsi les propriétés principales contenues dans le théorème de M. Dandelin ne se trouvent point dans l'ellipsoïde aplati. Toutefois, cette surface en possède encore quelques-unes qui rappellent les précédentes.

Soit une ellipse ayant avec un cercle deux points de contact C, G symétriques l'un à l'autre par rapport au petit

FIG. 5



axe. L'ellipse est contenue tout entière dans le cercle et la corde CG leur est commune. Par un point M pris sur l'ellipse, menons dans le cercle un diamètre MO; puis élevons dans le cercle la perpendiculaire ME au diamètre. Cette droite correspond à une tangente qu'on mènerait au cercle du point M si ce plan était extérieur. Or en appelant MN la distance de M à la corde CG, on démontrerait que l'on a

$$\frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{MN}} = \frac{m}{n} = \frac{c}{b}.$$

L'ellipse par rapport à ce cercle et l'ellipsoïde aplati par rapport à une sphère tangente jouissent donc de propriétés analogues à celles des autres surfaces.

En coupant par un plan un ellipsoïde aplati avec sa sphère tangente et le plan du parallèle de contact, on reproduit un système d'ellipse, de cercle et de droite de même nature que le système générateur.

Si le plan coupant contient une tangente au parallèle de contact, le cercle provenant de la sphère est osculateur à l'ellipse provenant de la surface.