P. DE FOVILLE

Solution de la question 356 qui conduit à celle de la question 347

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 326-333

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__326_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 356

(voir t. XVI, p 57)

QUI CONDUIT A CELLE DE LA QUESTION 347

(voir t. XV, p 387);

PAR M. P. DE FOVILLE,
Élève de l'École préparatoire des Carmes (classe de M. Gerono).

1°. *Discuter la courbe représentée par l'équation*

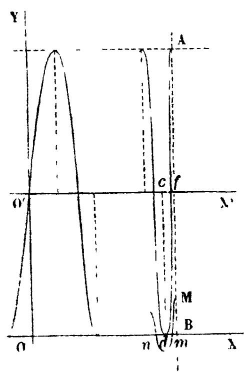
$$(1) \qquad y = \sin [(2n+1) \operatorname{arc} \sin x] + 1.$$

2°. *Démontrer que si* $\varphi(x)$ *est une fonction impaire qui n'a pas plus de* $2n-1$ *racines comprises entre* $+1$ *et* -1, *la courbe représentée par l'équation*

$$(2) \qquad y = \varphi(x)$$

rencontre la courbe (1) *au moins en un point dont l'abscisse est comprise entre* $+1$ *et* -1.

3°. *Déduire de ce qui précède la démonstration du théorème de M. Tchebychew* (question 347, t. XV, p. 387, Prouhet.)



1°. Je suppose que OX, OY soient les axes rectangulaires donnés. Afin de simplifier la discussion, je prendrai provisoirement pour axe des X la droite O'X' dont l'équation est

$$y = 1;$$

l'équation de la courbe deviendra

$$y = \sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x].$$

On reconnaît immédiatement que la nouvelle origine O' est un point de la courbe et un centre, car cette équation, vérifiée par les valeurs $x = 0$, $y = 0$, conserve les mêmes solutions lorsqu'on change à la fois x en $-x$ et y en $-y$.

La variable x représentant un sinus ne peut recevoir que les valeurs comprises entre $+1$ et -1 ; à chacune de celles qui sont renfermées dans cet intervalle, il en correspond une infinité de arc $\sin x$, mais cependant une seule de y. En effet, si α représente la plus petite valeur positive de arc $\sin x$, toutes les autres sont données par les formules

$$2k\pi + \alpha, \quad (2k+1)\pi - \alpha,$$

et l'équation proposée peut être remplacée par l'ensemble des deux suivantes :

$$y = \sin[(2n+1)(2k\pi + \alpha)],$$
$$y = \sin\{(2n+1)[(2k+1)\pi - \alpha]\}.$$

Celles-ci se réduisent, lorsque l'on supprime les multiples inutiles de la circonférence, à

$$y = \sin[(2n+1)\alpha],$$
$$y = \sin[\pi - (2n+1)\alpha],$$

et l'on voit qu'elles sont équivalentes. Il suffit donc de conserver l'une d'elles, soit

$$y = \sin[(2n+1)\alpha],$$

qui pour chaque valeur de α et de x n'en donne bien qu'une seule de y.

Pour obtenir les points de la branche de courbe située à droite de l'axe des Y, il faut faire croître x de 0 à 1, ou, ce qui revient au même, faire croître α de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On peut la construire avec une certaine exactitude au moyen du tableau suivant qui montre en regard les valeurs simultanées les plus remarquables de x et de y :

α	y
$\frac{\pi}{2(2n+1)}$	1
$\frac{2\pi}{2(2n+1)}$	0
$\frac{3\pi}{2(2n+1)}$	-1
....	
$\frac{(2n-3)\pi}{2(2n+1)}$	1
$\frac{(2n-2)\pi}{2(2n+1)}$	0
$\frac{(2n-1)\pi}{2(2n+1)}$	-1
$\frac{2n\pi}{2(2n+1)}$	0
$\frac{(2n+1)\pi}{2(2n+1)}$	1

Si l'on remarque que l'ordonnée et sa dérivée seconde, respectivement représentées par

$$\sin[(2n+1)\alpha]$$

et

$$-(2n+1)^2 \sin[(2n+1)\alpha],$$

sont toujours de signes contraires, que par conséquent la courbe tourne constamment sa concavité vers l'axe des X, on reconnaît que, partant de l'origine, elle se compose d'une série d'arcs sinueux qui successivement s'élèvent au-dessus et s'abaissent au-dessous de cet axe, et qu'elle vient enfin se terminer brusquement au point dont les coordonnées sont $x = 1, y = 1$.

Chaque valeur de x qui rend $(2n+1)\alpha$ multiple impair de $\frac{\pi}{2}$ correspond à une ordonnée maximum ou minimum dont la longueur absolue est toujours égale à 1. Dans l'intervalle de deux de ces ordonnées consécutives, la courbe rencontre nécessairement l'axe des X en un point dont l'abscisse rend $(2n+1)\alpha$ multiple de π. Les points d'intersection sont au nombre de n à droite de l'axe des Y. Comme il s'en trouve autant sur la branche de gauche, symétrique par rapport au centre de celle qui vient d'être construite, et que de plus l'origine O′ appartient à la courbe, le nombre total des points où elle coupe l'axe O′X′ est $2n+1$. On achève de prendre une idée exacte de sa forme, en remarquant que l'intervalle de deux de ces points consécutifs devient de plus en plus petit à mesure qu'ils s'éloignent de l'origine. En effet, leurs abscisses sont les sinus d'arcs équidistants l'un de l'autre de $\frac{\pi}{2n+1}$, et l'on sait que dans le premier quadrant le rapport $\frac{x}{\text{arc}\sin x}$ diminue lorsque x augmente.

2°. Il faut maintenant revenir au premier système d'axes, et faire voir que si $\varphi(x)$ est une fonction impaire ayant au plus $2n - 1$ racines comprises entre $+1$ et -1, la courbe représentée par l'équation

$$y = \varphi(x)$$

coupe nécessairement l'espèce de sinusoïde qui vient d'être construite.

J'observe d'abord que puisque $\varphi(x)$ change de signe tout en conservant la même valeur absolue lorsqu'on y remplace x par $-x$, la courbe $y = \varphi(x)$ a l'origine O pour centre. Profitant de cette remarque, je vais chercher à établir la propriété en question, en montrant que d'un point de la droite AB dont l'équation est $x = 1$ au point symétrique par rapport à O de A′B′ dont l'équation est $x = -1$, il est impossible de tracer une courbe qui ne rencontre pas la sinusoïde et soit telle, qu'à chaque valeur de x en corresponde une seule de y, sans qu'elle ait au moins $2n+1$ points d'intersection avec OX. Il n'y aurait pas lieu à démonstration si la valeur de y correspondant à $x = 1$ était négative ou si elle était positive et plus grande que 1, car alors la courbe ayant l'origine pour centre couperait évidemment la sinusoïde. Je supposerai donc que le point pris sur AB soit comme M compris entre A et B. Une branche de courbe partant de ce point et se dirigeant vers l'origine sans couper la sinusoïde peut présenter une forme quelconque dans l'intervalle compris entre le dernier arc dfA de celle-ci et la droite AB; mais il est impossible qu'elle passe à gauche de l'ordonnée cd sans couper l'axe des X en un certain point m compris entre d et B, et de s'abaisser au-dessous de cet axe. La branche symétrique qui part de M′ le coupera en un point correspondant m' et s'élèvera au-dessus de lui, mais elle ne pourra passer à droite de $c'd'$ (symétrique à cd) sans le couper une nouvelle fois en un point n' auquel correspondra de même un point n de l'autre branche situé sur OX. En continuant de cette manière à tracer simultanément les deux branches qui tendent l'une vers l'autre pour se réunir, on reconnaît que la courbe dont elles font partie doit couper OX en deux points, chaque fois que se présente une ordonnée minimum de la sinusoïde dont il faut éviter la rencontre. L'ordonnée terminale A'B' est la seule qui se trouve naturellement évitée. Les autres sont au nombre de n. La courbe tracée entre M et M' ne peut donc avoir moins de $2n+1$ points d'intersection avec l'axe des X (le nombre de ces points est nécessairement impair), et celle que représente l'équation

$$y = \varphi(x)$$

en ayant au plus $3n - 1$ dans l'intervalle des mêmes ordonnées doit couper la sinusoïde.

3°. Le théorème de M. Tchebychew est ainsi énoncé (question 347) :

Soit donnée l'équation

$$x^{2n+1} + ax^{2n-1} + bx^{2n-3} + \ldots + lx + k = 0$$

qui ne renferme que des puissances impaires, il y a une racine réelle comprise entre $2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$ *et* $-2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$.

Il revient évidemment au même de dire que l'équation obtenue en divisant par $2\sqrt[2n+1]{\frac{k}{2}}$ les racines de la précédente a une racine comprise entre $+1$ et -1. Le premier des termes de cette nouvelle équation est $2^{2n}.k.x^{2n+1}$, et si on les divise tous par k, ce qui n'altère pas les solutions, elle prend la forme

$$(3)\quad 2^{2n}.x^{2n+1} + Ax^{2n-1} + Bx^{2n-3} + \ldots + Lx + 1 = 0.$$

Le théorème sera démontré si je fais voir que les racines comprises entre $+1$ et -1 peuvent être représentées par les abscisses des points communs aux deux courbes dont les équations sont désignées par (1) et (2) (p. 236).

Pour y parvenir, je rappellerai d'abord que, d'après une formule de la trigonométrie, on a

$$\sin[(2n+1)\alpha] = (2n+1)\cos^{2n}\alpha\sin\alpha - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}\cos^{2n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x] = (2n+1)(1-x^2)^n x - \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}(1-x^2)^{n-1}x^3 + \ldots.$$

Une première remarque à faire sur ce développement, c'est qu'il est une fonction impaire de x. Il se compose en effet d'une somme algébrique de termes où chacun est le produit d'une puissance de $(1-x^2)$ par une puissance impaire de x. Une seconde remarque est relative au coefficient de x^{2n+1}, terme qui est évidemment celui du degré le plus élevé dans chacun des produits dont je viens de parler où il se trouve alternativement avec le signe $+$ et le signe $-$. Pour rendre le raisonnement plus précis, je supposerai d'abord n pair; alors le produit $(1-x^2)^n.x$ fournit le terme $+x^{2n+1}$ tandis que $(1-x^2)^{n-1}x^3$ donne $-x^{2n+1}$; mais comme ce dernier est précédé dans le développement d'un coefficient négatif, c'est encore avec le signe $+$ que x^{2n+1} se retrouve dans la somme : il en résulte que le coefficient de x^{2n+1} est égal à la somme de tous les coefficients numériques du développement, c'est-à-dire de ceux de la $2n+1^{ième}$ puissance du binôme pris de deux en deux, ou encore à la demi-somme $\frac{1}{2}2^{2n+1} = 2^{2n}$ de tous les coefficients de cette formule. Je puis donc poser

$$\sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x]$$
$$= 2^{2n}x^{2n+1} + A'x^{2n-1} + B'x^{2n-3} + \ldots + L'x$$

et remplacer l'équation (1) par l'équation algébrique

$$(1')\quad y = 2^{2n}x^{2n+1} + A'x^{2n-1} + B'x^{2n-3} + \ldots + L'x + 1,$$

dans laquelle il faut seulement convenir de n'attribuer à x que les valeurs comprises entre $+1$ et -1.

Il est maintenant facile de voir que les racines de l'équation (3) sont représentées par les abscisses des points communs à la courbe (1′) et à la suivante

$$y = (A' - A)x^{2n-1} + (B' - B)x^{2n-3} + \ldots + (L' - L)x,$$

dont l'équation est comprise dans l'équation (2) ; car c'est une fonction impaire de x et n'a pas plus de $2n-1$ racines.

Tout ceci suppose n pair.

Si n était impair, le coefficient de x^{2n+1} dans le développement de $\sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x]$ serait -2^{2n} ; mais alors on pourrait remplacer la courbe (1) par celle dont l'équation est

$$y = \sin[(2n+1)\operatorname{arc}\sin x] - 1$$

qui rencontre aussi la courbe (2) en un point dont l'abscisse est comprise entre $+1$ et -1. Les termes extrêmes de l'équation (1′) deviendraient ainsi $-2^{m}x^{m+1}$ et -1, et pour que ceux de l'équation (3) leur fussent égaux, il suffirait de changer tous les signes de cette dernière équation : les conclusions auxquelles on parviendrait seraient encore les mêmes.