NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Question d'examen (admissibilité à l'École navale)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 305-307

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__305_1>

QUESTION D'EXAMEN
(Admissibilité à l'École Navale).

Sachant que le volume d'un segment sphérique à une base est une fonction entière du troisième degré de la hauteur du segment, déterminer cette fonction.

Soient h la hauteur du segment et r le rayon de la sphère. Quand $h = 0$, le volume du segment est nul; donc, la fonction cherchée est de la forme $Ah^3 + Bh^2 + Ch$; c'est-à-dire qu'elle ne renferme aucun terme indépendant de h. Il est de plus à remarquer que le coefficient C de la première puissance de h ne peut être négatif, car, en donnant à h une valeur positive suffisamment petite, le signe de $Ah^3 + Bh^2 + Ch$ est le même que celui de C.

Cela posé, considérons un cylindre ayant même base et même hauteur que le segment, son volume aura pour expression $2\pi rh^2 - \pi h^3$. Et, comme le segment est entièrement contenu dans l'intérieur du cylindre, il en résulte l'inégalité

$$Ah^3 + Bh^2 + Ch < 2\pi rh^2 - \pi h^3,$$

d'où

$$C < 2\pi rh - \pi h^3 - Ah^2 - Bh.$$

Si l'on fait converger h vers zéro, le second membre de cette inégalité devient moindre que toute quantité positive donnée, donc $C = 0$.

Pour déterminer les valeurs de A et B, on remarquera qu'en remplaçant successivement h par r et $2r$, le volume du segment prend les valeurs $\frac{2}{3}\pi r^3$, $\frac{4}{3}\pi r^3$; de sorte qu'on a

$$Ar^3 + Br^2 = \frac{2}{3}\pi r^3, \quad \text{et} \quad 8Ar^3 + 4Br^2 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

ou

$$Ar + B = \frac{2}{3}\pi r \quad \text{et} \quad 2Ar + B = \frac{\pi r}{3}.$$

Ces dernières équations donnent

$$A = -\frac{\pi}{3}, \quad B = \pi r.$$

Par conséquent, la fonction cherchée est

$$\pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Note. Cette question a été, il y a quelques années, adressée plusieurs fois par M. Comte à des candidats pour l'admission à l'École Polytechnique, aucun d'eux ne l'a résolue (*). Il n'existait alors aucun *Programme officiel;* les questions de fantaisie avaient un libre cours. Je crois qu'elles n'ont jamais servi à éclairer le jugement de MM. les Examinateurs sur l'intelligence et l'instruction des candidats qu'ils ont examinés. Je reviendrai sur ce sujet. G.