

DE BLERZY

Invariants

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17
(1858), p. 301-305

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__301_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INVARIANTS ;

PAR M. DE BLERZY,

Directeur des lignes télégraphiques à la Rochelle.

1. On lit, page 200 de la *Théorie des déterminants*, du D^r Brioschi (traduction Combescure) que les invariants φ d'une fonction

$$(1) \quad f_n = (a_0, a_1, \dots, a_n)(x, y)^n$$

doivent vérifier les équations différentielles

$$(2) \quad \sum_{i=0}^{i=n} i a_{i-1} \frac{d\varphi}{da_i} = 0,$$

et

$$(3) \quad \sum_{i=0}^{i=n} i a_{n-i+1} \frac{d\varphi}{da_{n-i}} = 0.$$

La seconde de ces équations différentielles par sa texture et par son mode de formation est symétrique de la première par rapport à (a_i, a_{n-i}) , c'est-à-dire qu'elle se déduit de la première par la substitution de a_{n-i} à a_i , pourvu que φ soit symétrique. La condition de symétrie mise à l'équation (2) suffit donc pour caractériser les invariants.

Le savant traducteur de l'ouvrage cité ajoute :

« M. Cayley a prouvé qu'une seule équation différentielle jointe à la condition d'homogénéité peut remplacer les deux équations dont il s'agit. » Cette homogénéité doit probablement s'étendre tant aux indices qu'aux exposants.

2. Une fonction paire f_{2m} a un invariant du 2^e degré qui est

$$(4) \quad {}^*I_{2m} = a_0 a_{2m} - 2m \cdot a_1 a_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2} a_2 a_{2m-2} - \dots, \\ \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{2m \dots (m+1)}{1 \cdot 2 \dots m} a_m^2.$$

I_{2m} est symétrique et satisfait l'équation (2); la vérification est facile.

3. Une fonction impaire f_{2m+1} a un invariant 4^e degré qui est

$$(5) \quad I_{2m+1} = \left(\sum_{i=0}^{i=2m+1} a_i \frac{dI_{2m}}{da_{i-1}} \right)^2 - 4I_{2m} I_{2m},$$

I_{2m} étant l'invariant du 2^e degré de

$$f_{2m}(a_0, a_1, \dots, a_{2m})(x, y)^{2m},$$

I'_{2m} étant l'invariant du 2^e degré de

$$f_{2m}(a_1, a_2, \dots, a_{2m+1})(x, y)^{2m}.$$

On peut écrire cet invariant sous la forme suivante :

$$(6) \quad I_{2m+1} = \left(\begin{array}{c} a_0 a_{2m+1} - \alpha_1 a_1 a_{2m} \\ + \alpha_2 a_2 a_{2m-1} + \dots \\ \pm \alpha_i a_i a_{2m-i+1} \dots \pm \alpha_m a_m a_{m+1} \end{array} \right)^2 - 4I_{2m} I'_{2m},$$

où α_i se déduit de α_{i-1} par la formule

$$i\alpha_i = (2m - i + 2)\alpha_{i-1} - 2 \cdot \frac{2m \dots (2m - i + 2)}{1 \cdot 2 \dots (i-1)},$$

et $\alpha_1 = 2m - 1$.

(*) I_{2m} c'est φ . Tm.

I_{2m+1} est symétrique sous les deux formes que nous venons de lui donner, et la vérification de l'équation différentielle (2) s'en fait aisément en ayant égard à

$$\sum_{i=0}^{i=2m} ia_{i-1} \frac{dI_{2m}}{da_i} = 0.$$

4. La fonction paire f_{2m} a un invariant du degré $m+1$ qui est

$$(7) \quad I_{2m+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1, \dots, & a_m, \\ a_1 & a_2, \dots, & a_{m+1}, \\ a_2 & a_3, \dots, & \\ \dots & \dots & \\ a_m, & a_{m+1}, \dots, & a_{2m}, \end{vmatrix} \quad (\text{à démontrer}).$$

5. Il serait bon que les invariants fussent toujours écrits d'une manière uniforme, par exemple, sous la forme que leur donnent les formules ci-dessus. En employant la notation habituelle (*), on a, pour le 2^e degré

$$I_2 = ac - b^2 \quad \text{ou} \quad I_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix};$$

pour le 3^e degré,

$$I_3 = (ad - bc)^2 - 4(ac - b^2);$$

pour le 4^e degré,

$$I_4 = ae - 4bd + 3c^2,$$

et

$$I_5 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = ace + 2bcd - b^2e - ad^2c^2;$$

pour le 5^e degré,

$$I_5 = (af - 3be + 2cd)^2 - 4(ac - 4bd + 3c^2)(bf - 4de + 3d^2).$$

(*) Alors on remplace a_0 par a , a_1 par b , a_2 par c , a_3 par d , etc. Tm.

Les équations différentielles de condition sont, pour le 5^e degré,

$$a \frac{dI}{db} + 2b \frac{dI}{dc} + 3c \frac{dI}{dd} + 4d \frac{dI}{de} + 5e \frac{dI}{df} = 0,$$

et

$$5b \frac{dI}{da} + 4c \frac{dI}{db} + 3d \frac{dI}{dc} + 2e \frac{dI}{dd} + f \frac{dI}{de} = 0.$$

En vérifiant, au moyen de ces équations, l'invariant I_5 que nous venons d'écrire, on verra clairement que la condition de symétrie peut être substituée à l'une d'elles.

Note du Rédacteur.

Premier exemple. Soit $n = 4$; par conséquent $m = 2$.
On a

$$f_i = a_1 x^4 + 4a_2 x^3 y + 6a_3 x^2 y^2 + 4a_4 x y^3 + a_5 y^4.$$

Premier invariant.

$$\varphi = I_4 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 6a_2^2 - 3a_2^2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

L'équation (2) développée est

$$(2) \quad a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3a_2 \frac{d\varphi}{da_3} + 4a_3 \frac{d\varphi}{da_4} = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1} = -4a_3; \quad \frac{d\varphi}{da_2} = 6a_2; \quad \frac{d\varphi}{da_3} = -4a_1; \quad \frac{d\varphi}{da_4} = a_0;$$

faisant les substitutions, l'équation (2) se vérifie.

Deuxième invariant.

$$\varphi = I_4 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 - a_2^3,$$

$$\frac{d\varphi}{da_1} = 2(a_2 a_3 - a_1 a_4); \quad \frac{d\varphi}{da_2} = a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2;$$

$$\frac{d\varphi}{da_3} = 2(a_1 a_2 - a_0 a_3); \quad \frac{d\varphi}{da_4} = a_0 a_2 - a_1^2;$$

les substitutions vérifient l'équation (2).

Deuxième exemple :

$$n = 3; \quad m = 1;$$

$$f_3 = a_0 x^3 + 3 a_1 x^2 y + 3 a_2 x y^2 + a_3;$$

$$f_2 = a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2; \quad f'_2 = a_1 x^2 + 2 a_2 x y + a_3 y^2;$$

$$I_2 = a_0 a_2 - a_1^2; \quad I'_2 = a_1 a_3 - a_2^2;$$

$$I_3 = \left(a_1 \frac{dI_2}{da_0} + a_2 \frac{dI_2}{da_1} + a_3 \frac{dI_2}{da_2} \right)^2 - 4 I_2 I'_2,$$

c'est l'équation (5) développée

$$\frac{dI_2}{da_0} = a_2; \quad \frac{dI_2}{da_1} = -2 a_1; \quad \frac{dI_2}{da_2} = a_0.$$

Substituant, on trouve

$$I_3 = (a_0 a_3 - a_2 a_1)^2 - 4 (a_0 a_2 - a_1^2) (a_1 a_3 - a_2^2) = \varphi,$$

L'équation (2) développée est

$$a_0 \frac{d\varphi}{da_1} + 2 a_1 \frac{d\varphi}{da_2} + 3 a_2 \frac{d\varphi}{da_3} = 0.$$

Faisant les substitutions, elle se vérifie de même pour I_3 .
