

POUDRA

Équation d'une surface du deuxième degré passant par neuf points

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 17 (1858), p. 297-301

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__297_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**ÉQUATION D'UNE SURFACE DU DEUXIÈME DEGRÉ
PASSANT PAR NEUF POINTS;**

PAR M. POUDRA.

1. Soient $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3$, les coordonnées respectives de trois points, et $ax + by + cz = d$ l'équation du plan qui passe par ces trois points; on a

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d,$$

$$ax_2 + by_2 + cz_2 = d,$$

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = d;$$

d'où l'on déduit

$$(x_1, y_2, z_3) = \frac{(dy_2, z_3)}{a} = \frac{(x_1, dz_3)}{b} = \frac{(x_1, y_2, d)}{c}$$

et de là pour l'équation du plan

$$(dy_2, z_3)x + (x_1, dz_3)y + (x_1, y_2, d)z = d(x_1, y_2, z_3);$$

les parenthèses désignent des déterminants.

Ou bien

$$x[(y_1, z_2) + (y_2, z_3) + (y_3, z_4)] + y[(x_1, z_3) + (x_2, z_1) + (x_3, z_2)] \\ + z[(x_1, y_2) + (x_2, y_3) + (x_3, y_1)] = (x_1, y_2, z_3),$$

et développant

$$x[y_1(z_2 - z_3) + y_2(z_3 - z_1) + y_3(z_1 - z_2)] \\ + y[z_1(x_2 - x_3) + z_2(x_3 - x_1) + z_3(x_1 - x_2)] \\ + z[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \\ = x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$$

2. Soient les neuf points A, B, C, D, E, F, F, H, I, ayant pour coordonnées respectives, savoir

$$A \dots x_1, y_1, z_1,$$

$$B \dots x_2, y_2, z_2,$$

$$C \dots x_3, y_3, z_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I \dots x_9, y_9, z_9,$$

Concevons le tétraèdre ABCD; d'après le § 1, on peut trouver les équations des plans, faces du solide.

Désignons par

$$a = 0 \text{ l'équation des plans BCD,}$$

$$b = 0 \quad \text{''} \quad \text{ACD,}$$

$$c = 0 \quad \text{''} \quad \text{ABD,}$$

$$d = 0 \quad \text{''} \quad \text{ABC.}$$

Désignons par a_s, b_s ce que deviennent a et b lorsqu'on y remplace x, y, z respectivement par les coordonnées x_s, y_s, z_s du point E, et ainsi des autres; on obtient pour

$$\begin{array}{ll} \text{l'équation du plan CDE} & ab_s - ba_s = 0, \\ \text{» CDF} & ab_6 - ba_6 = 0, \\ \text{» ABE} & cd_s - dc_s = 0, \\ \text{» ABF} & cd_6 - dc_6 = 0. \end{array}$$

Le faisceau de surfaces donné par l'équation

$$(ab_s - ba_s)(cd_6 - dc_6) - K(ab_6 - ba_6)(cd_s - dc_s) = 0,$$

où K est une indéterminée, passe par les six points A, B, C, D, E, F, ce qu'on peut écrire d'une manière abrégée

$$(ab_s)(cd_6) - K(ab_6)(cd_s) = 0.$$

Déterminons K de manière qu'une des surfaces du faisceau passe par le septième point G (x_y, y_z, z_x); alors il vient

$$R = (ab_s)(cd_6)(a, b_s)(c, d_s) - (ab_6)(cd_s)(a, b_s)(c, d_6) = 0.$$

Les parenthèses sont des binômes alternés et R = 0 est une des surfaces qui passent par les sept points A, B, C, D, E, F, G, et cette surface est réglée; car les deux droites AB, CD, arêtes opposées du tétraèdre ABCD, sont entièrement sur cette surface.

Par ces mêmes sept points, on peut faire passer une seconde surface réglée S renfermant les deux droites AD, CB; pour avoir S, il suffit de changer dans R b en d et d en b ; on obtient

$$S = (ad_s)(cb_s)(a, d_6)(c, b_s) - (ad_6)(cb_s)(a, d_s)(c, b_6) = 0.$$

Enfin par ces mêmes points on peut faire passer une troisième surface réglée I renfermant les deux droites

AC, BD; il suffit de changer dans R, b en c et c en b ; on a

$$I = (ac_s)(bd_s)(a, c_s)(b, d_s) - (ac_s)(bd_s)(a, c_s)(b, d_s);$$

la surface du deuxième degré donnée par l'équation

$$pR + qS = T$$

passé évidemment par les sept points A, B, C, D, E, F, G, et en général n'est plus réglée et les deux indéterminées p et q peuvent servir à faire passer la surface par les deux points restants H et I; désignant par R_8, S_8, T_8 ; R_9, S_9, T_9 ce que deviennent respectivement R, S, T en remplaçant x, y, z successivement par x_8, y_8, z_8 ; x_9, y_9, z_9 on a

$$pR_8 + qS_8 = T_8,$$

$$pR_9 + qS_9 = T_9,$$

d'où l'on tire

$$(R_8 S_9) = \frac{(T_8 S_9)}{p} + \frac{(R_8 T_9)}{q};$$

ainsi l'équation de la surface qui passe par les neuf points donnés sera

$$(1) \quad (T_8 S_9)R + (R_8 T_9)S + (S_9 R_8)T = 0.$$

R renferme 32 termes; $(T_8 S_9)$ renferme $2 \cdot 32^2$ termes, ainsi $(T_8 S_9)R$ contient $2 \cdot 32^3$ termes, et l'équation (1) contient en général $6 \cdot 32^3 = 196608$ termes; c'est le nombre en considérant a, b, c, d comme des monômes; mais chacun renferme vingt-quatre termes exprimés en fonction des coordonnées; ainsi le nombre des termes de l'équation en fonction des vingt-sept coordonnées est $3^{13} \cdot 2^{52}$ termes = 7,180,264,989,898,998,898,989, nombre composé de vingt-deux chiffres, mais dans les calculs numériques le nombre de termes se réduit considérablement.

3. Si x_1, y_1, z_1 , sont les coordonnées d'un dixième point situé sur la même surface, et si l'on désigne par

R_{10}, S_{10}, T_{10} , ce que deviennent R, S, T en y remplaçant x, y, z par x_{10}, y_{10}, z_{10} , on a la relation suivante entre les coordonnées de dix points situés sur la surface

$$(T_8 S_9) R_{10} + (R_8 T_9) S_{10} + (S_9 R_8) T_{10} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} T_8, T_9, T_{10} \\ S_8, S_9, S_{10} \\ R_8, R_9, R_{10} \end{vmatrix} = 0.$$