

J. GROUVELLE

## **Solution de la question 433**

*Nouvelles annales de mathématiques 1<sup>re</sup> série*, tome 17  
(1858), p. 285-288

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1858\\_1\\_17\\_\\_285\\_0](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__285_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1858, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

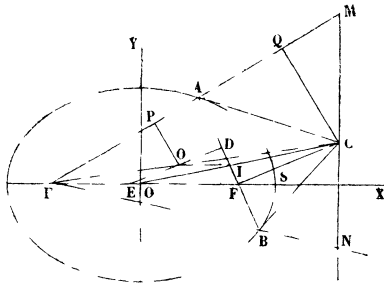
**SOLUTION DE LA QUESTION 433**

(voir p 185),

PAR M. J. GROUVELLE,

Elève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Vieille).

Trouver le lieu des centres des cercles inscrits aux triangles ayant pour sommet l'un des foyers d'une conique et pour base une corde passant par l'autre foyer. Le centre est sur la parallèle à l'axe focal menée par le milieu de la corde.



1. *Ellipse.* Soit  $AB$  une corde passant par le foyer  $F'$ . En menant par le milieu  $I$  de cette corde une parallèle à l'axe focal, on aura une droite qui contiendra le centre du cercle inscrit au triangle  $ABF'$ .

En effet, les tangentes  $BC$  et  $AC$  aux extrémités de la corde  $AB$  viennent concourir en  $C$  sur la directrice  $MN$ , et, de plus, ces tangentes étant bissectrices des angles  $MAF$ ,  $NBF$ , le point  $C$  est donc également distant de  $F'A$ ,  $F'B$  et, par conséquent, la droite  $F'C$  est bissectrice de l'angle  $AF'B$ . Donc le centre du cercle inscrit se trouve sur cette droite en un point  $O'$  par exemple.

Abaissons les perpendiculaires  $O'P$  et  $O'D$  sur les côtés  $F'A$  et  $AB$ . Prolongeons  $O'D$  jusqu'à sa rencontre en  $E$  avec l'axe focal. Les quadrilatères  $F'EO'P$ ,  $F'FCQ$  sont semblables ; or

$$CF = CQ,$$

donc

$$O'E = O'P = O'D;$$

ainsi  $O'$  est le milieu de  $DE$ . Le point  $D$  est le point de contact du cercle inscrit au triangle  $F'AB$ , et, d'après une propriété connue,  $FC$  est perpendiculaire sur  $AB$ . Il en résulte que le point  $F$  est le point de contact du cercle ex-inscrit au triangle  $ABF'$ , et que l'on a

$$AD = BF.$$

Le diamètre  $OC$  conjugué à la corde  $AB$  la divise en  $I$  parties égales ; donc  $I$  est le milieu de  $DF$ , et  $O'$  étant le milieu de  $DE$ , il s'ensuit que la droite  $O'I$  est parallèle à l'axe focal.

Prenons pour axes de coordonnées ceux de l'ellipse.

La droite  $F'C$  a pour équation

$$y = m(x + c).$$

Les coordonnées du point  $C$ , pôle de  $AB$ , sont donc

$$x = \frac{a^2}{c},$$

$$y = m \frac{a^2 + c^2}{c}.$$

Ainsi le lieu du cercle ex-inscrit qui touche la corde mobile est la directrice.

La polaire  $AB$  aura donc pour équation

$$m(a^2 + c^2)y + b^2x = b^2c.$$

Le point  $I$ , milieu de  $AB$ , se trouve sur le diamètre  $OC$

dont l'équation est

$$y = \frac{a^2 + c^2}{a^2} mx.$$

Eliminant  $x$  entre les équations de OC et de AB, on trouve pour ordonnée du point I

$$y = \frac{mb^2c(a^2 + c^2)}{m^2(a^2 + c^2)^2 + a^2b^2}.$$

Telle est l'ordonnée du point I, et, par conséquent, l'équation de la parallèle O'I à l'axe de l'ellipse.

Or, d'après ce qui a été démontré plus haut, cette droite contient le centre du cercle inscrit. D'ailleurs la droite F'C le contient aussi. Donc pour avoir l'équation du lieu, il suffit d'éliminer l'indéterminée  $m$  entre l'équation de O'I et celle de F'C.

Exécutant cette opération, on trouve

$$y^2(a^2 + c^2)^2 + a^2b^2x^2 + b^4cx - b^2c^4 = 0,$$

équation qui représente une ellipse dont un des axes est l'axe des  $x$  et l'autre parallèle à l'axe des  $y$ . Sous la première forme, on voit à priori que l'équation du lieu est vérifiée pour

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = -c,$$

c'est-à-dire que le point F' est un point du lieu.

La construction ne présente aucune difficulté.

2. *Hyperbole.* Il suffit de changer  $+b^2$  en  $-b^2$ ; ainsi le lieu cherché est une hyperbole.

3. *Parabole.* Transportons l'origine au sommet en changeant  $x$  en  $x + a$ .

L'équation était

$$(a^2 + c^2)^2 y^2 + a^2 b^2 x^2 + b^4 cx - b^2 c^4 = 0;$$

elle devient, après le transport de l'origine,

$$(a^2 + c^2)y^2 + a^2 b^1 x^2 + 2 a^1 b^2 x + a^1 b^1 + b^1 c x + a c b^1 - b^2 c^1 = 0.$$

Divisant les deux membres par  $a^4$ , il vient

$$\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right)y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 + 2 \cdot \frac{b^2}{a}x + b^2 + \frac{b^1 c}{a^1}x + \frac{b^1 c}{a^2} - \frac{b^2 c^1}{a^1} = 0.$$

Passant aux limites, on obtient

$$4y^2 + 2px + 3p' = 0,$$

parabole dont le sommet a pour abscisse  $-\frac{3}{2}p$  et dont le paramètre est  $-\frac{p}{4}$ .

M. L. G. (de Liège) fait observer : 1<sup>o</sup> que la droite O'I rencontre CF en un point N point de rencontre des trois hauteurs du triangle CAB; 2<sup>o</sup> que les trois points O', I, N décrivent des ellipses ayant des petits axes égaux.

---