NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FAURE

Transformation des propriétés métriques des figures

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 276-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__276_0>

TRANSFORMATION DES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES DES FIGURES;

PAR M. FAURE,
Capitaine d'artillerie.

PREMIÈRE PARTIE.

FIGURES PLANES.

Préliminaires.

1. *Lorsque des points* a, b, c, d,..., e, f *se succèdent sur une droite dans un ordre quelconque, on a toujours entre ces points la relation*

$$af = ab + bc + cd \ldots + ef.$$

On convient de regarder comme positifs les segments dirigés dans un certain sens, et comme négatifs ceux qui sont dirigés dans le sens contraire.

2. Nous étendrons ce principe aux aires des triangles. Si un point mobile parcourt le périmètre d'un triangle, nous regarderons son aire comme positive lorsque le point tournera dans un certain sens, et comme négative lorsqu'il tournera en sens contraire. D'après cela, les triangles abc et acb seraient de signes contraires, et l'on vérifiera aisément le théorème suivant :

Si l'on joint un point quelconque o, *pris dans le plan d'un triangle* abc *aux sommets* a, b, c, *on aura toujours*

$$abc = abo + bco + cao,$$

d'où l'on déduira celui-ci :

Si l'on joint un point quelconque o, *pris dans le plan d'un polygone* abcd... ef *à tous les sommets, on a, pour* *l'expression de l'aire* S *de ce polygone*

$$S = abo + bco + cdo \ldots efo + fao,$$

car si l'on suppose que cette relation soit vraie pour l'aire S′ d'un polygone $abcd\ldots e$, qui a un sommet de moins, on aura

$$S' = abo + bco + cdo \ldots + eao\,;$$

mais le triangle efa donne

$$efa = efo + fao + aeo\,;$$

ajoutant ces deux équations membre à membre et observant que eao et aeo se détruisent, on a la relation indiquée; donc, etc.

On établira de la même manière ce théorème : *Si les côtés successifs* A, B, C,..., E, F *d'un polygone sont coupés par une transversale arbitraire* O, *on a, pour l'expression de l'aire* S *de ce polygone,*

$$S = ABO + BCO + \ldots + EFO + FAO.$$

Nous indiquons par ABO l'aire du triangle formé par les trois droites A, B, O, et de même des autres.

3. Nous rappelons que l'aire S d'un triangle dont les coordonnées des sommets sont (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), est donnée par la relation

$$2S = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

les axes coordonnés sont rectangulaires, ce que nous supposerons toujours.

Cette relation permet d'*exprimer l'aire d'un triangle au moyen des équations des côtés de ce triangle.* On y arrive directement comme il suit :

Les sommets du triangle étant aux points a_1, a_2, a_3, soient

$$m_1 x + n_1 y + p_1 = 0,$$
$$m_2 x + n_2 y + p_2 = 0,$$
$$m_3 x + n_3 y + p_3 = 0,$$

les équations des côtés respectivement opposés à ces points, et r_2, r_3 les distances des sommets a_2, a_3 aux côtés de l'angle a_1. On a pour expression de l'aire S du triangle

$$S = \frac{1}{2} \frac{r_2 . r_3}{\sin a_1},$$

si x et y sont les coordonnées du sommet a_2, on aura pour déterminer la perpendiculaire r_2 les trois équations

$$m_1 x + n_1 y + p_1 = 0,$$
$$m_2 x + n_2 y + p_2 = r_2 \sqrt{m_2^2 + n_2^2},$$
$$m_3 x + n_3 y + p_3 = 0,$$

l'élimination de x et y donne le déterminant

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 - r_2 \sqrt{m_2^2 + n_2^2} \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où, en posant

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ m_3 & n_3 & p_3 \end{vmatrix} = P,$$

$$r_2 = \frac{P}{\frac{dP}{dp_2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}},$$

et de même

$$r_3 = \frac{P}{\frac{dP}{dp_3} \sqrt{m_3^2 + n_3^2}},$$

on a d'ailleurs

$$\sin a_1 = \frac{\frac{dP}{dp_1}}{\sqrt{m_2^2+n_2^2}\sqrt{m_3^2+n_3^2}},$$

d'où

$$2S = \frac{P^2}{\frac{dP}{dp_1}\frac{dP}{dp_2}\frac{dP}{dp_3}},$$

nous avons supprimé un double signe.

Comme application de cette formule, on arrive au résultat suivant, que nous énonçons sous forme de lemme :

LEMME. *Si par les extrémités* a *et* b *d'une droite* ab *on mène deux droites* ac, bc *respectivement parallèles aux droites imaginaires* $y = \pm\sqrt{-1}\,x$, *on détermine un triangle imaginaire* abc, *dont l'aire* S *s'obtient par la relation*

$$S = \frac{\overline{ab}^2}{4\sqrt{-1}}.$$

CHAPITRE PREMIER.

§ Ier. — *Homographie.*

1. Etant donnée une courbe plane $F(x', y') = 0$, si l'on remplace les coordonnées x' et y' de chaque point par les valeurs

$$(1) \qquad x' = \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \quad y' = \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''},$$

on aura l'équation d'une nouvelle courbe *homographique* à la première. Les relations (1) montrent que les deux courbes seront du même degré.

Si l'on pose

$$a''x + b''y + c'' = 0,$$

on aura dans la seconde figure une droite que j'appelle I, dont les points correspondront à ceux de la première situés à l'infini.

Les relations (1) résolues par rapport à x et y donnent pour ces quantités des valeurs de même forme que celles de x' et y'; elles ont pour dénominateur commun le déterminant

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \end{vmatrix}$$

De sorte que si l'on égale ce déterminant à zéro, la droite I', que l'on aura ainsi dans la première figure, correspondra à l'infini de la seconde.

Dans la suite de ce Mémoire, nous ne supposerons connues aucunes des propriétés des figures homographiques, elles se déduiront de nos relations métriques. Nous indiquerons seulement le théorème suivant de la géométrie supérieure.

2. *Deux figures homographiques étant placées d'une manière quelconque, il existe, en général, trois points qui, considérés comme appartenant à la première figure, sont eux-mêmes leurs homologues dans la seconde. Deux de ces points peuvent être imaginaires, mais le troisième est toujours réel.*

En effet, d'après les relations (1), pour que le point x', y' coïncide avec son correspondant x, y, on doit avoir

$$x(a''x + b''y + c'') = ax + by + c,$$
$$y(a''x + b''y + c'') = a'x + b'y + c',$$

de sorte que les points cherchés sont les intersections des deux hyperboles représentées par ces équations. Si l'on remarque qu'elles ont chacune une asymptote parallèle à la droite I, on pourra les considérer comme ayant un point d'intersection à l'infini sur cette droite, par conséquent les trois autres seront, en général, à distance finie, et l'un d'eux sera nécessairement réel. Ces points sont nommés *points doubles*.

3. *Notation*. Les points d'une figure étant désignés par les lettres accentuées a', b', c', etc., les points correspondants de la figure homographique seront indiqués par les mêmes lettres a, b, c, etc., dépourvues d'accents; les lettres grecques correspondantes α, β, γ, etc., exprimeront les distances des points a, b, c... à une droite fixe I. Les lettres A', B', C'... désignant des droites d'une figure, A, B, C... seront les droites correspondantes de la figure homographique.

L'angle de deux droites A et B sera désigné par la notation ordinaire (A, B).

La suite prochainement.