NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. JOURNEAUX

Solution de la question 404

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 264-268

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__264_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 404
(voir t. XVI, p. 401),

PAR M. G. JOURNEAUX, DE LIÉGE.

Deux* points matériels parcourent d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données en grandeur et en direction, deux droites situées dans l'espace; trouver l'équation de la surface décrite par la droite variable qui passe par deux positions simultanées des points matériels.

Soient M et M′ les deux points mobiles, v et v' leurs vitesses, A et A′ leurs positions respectives sur les droites données à l'origine du mouvement, et posons $AA' = 2\delta$. Prenons le milieu O de AA′ pour origine, pour axe des z la droite AA′ elle-même, et pour axes des x et des y les parallèles menées par le point O aux deux droites données. Les coordonnées positives sont comptées dans le sens du mouvement. Les équations de la droite AM seront

$$z = \delta \quad \text{et} \quad y = 0;$$

celles de la droite A′ M′

$$z = -\delta \quad \text{et} \quad x = 0.$$

Les coordonnées du point M, après un temps quelconque t, seront donc

$$x = vt, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad z = \delta;$$

celles du point M′, au même instant,

$$x = 0, \quad y = v't \quad \text{et} \quad z = -\delta.$$

On aura donc pour équation de la droite passant par ces deux points

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x - vt = \dfrac{vt}{2\delta}(z - \delta) \\ \text{et} \\ y = \dfrac{-v't}{2\delta}(z - \delta), \end{array} \right.$$

et, en éliminant t entre ces deux équations, on obtiendra pour l'équation de la surface

$$(\mathrm{S}) \qquad \frac{x}{v(\delta + z)} = \frac{y}{v'(\delta - z)}.$$

Les sections de cette surface par les plans des xz et des yz sont, comme on devait s'y attendre, les deux droites données elles-mêmes. La section par le plan des xy est la droite

$$z = 0, \quad y = \frac{v'}{v}x.$$

Ainsi la surface représentée par l'équation (S) est un paraboloïde hyperbolique, puisque le paraboloïde hyperbolique est la seule des surfaces du second ordre sur laquelle on puisse trouver, comme ici, trois droites parallèles à un même plan, et non situées dans un même plan.

Ce paraboloïde est déterminé géométriquement, puisque nous connaissons trois génératrices d'un même système. Si l'on veut qu'il soit donné par deux directrices et un plan directeur, nous remarquerons que la droite mobile qui, d'après l'énoncé du problème, engendre la surface, doit coïncider, dans ses positions successives, avec les génératrices du second système. Or, si l'on élimine z entre les équations (D) de cette droite, on trouve, pour équation de sa projection sur le plan des xy,

$$\frac{x}{v}+\frac{y}{v'}=t.$$

La droite mobile est donc constamment parallèle à un même plan, ce que, du reste, on savait déjà, et l'on obtiendra ce plan directeur en menant par l'origine, dans le plan des xy, la droite

$$\frac{x}{v}+\frac{y}{v'}=0,$$

et faisant passer un plan par cette droite et l'axe des z.

On pourra ensuite prendre pour directrices les deux droites données AM et A′ M′.

La droite

$$z=0,\quad \frac{x}{v}+\frac{y}{v'}=0,$$

intersection des deux plans directeurs, fait connaître la direction de l'axe du paraboloïde.

Note du Rédacteur. Deux droites étant rencontrées par un faisceau de plans sont coupées *homographique-*

ment, c'est-à-dire que quatre points quelconques d'intersection sur la première droite donnent le même rapport anharmonique que les quatre points correspondants de la seconde droite; en joignant les points d'intersection correspondants par des droites, on obtient les éléments rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe; car toutes ces droites rencontrent les droites données et l'arête du faisceau. Lorsque cette arête s'éloigne à l'infini, en d'autres termes, lorsque les plans deviennent parallèles, l'hyperboloïde devient parabolique, et, réciproquement, lorsque deux systèmes de points sont disposés homographiquement sur deux droites, et que trois des quatre droites qui joignent des points correspondants rencontrent une même droite, toutes les droites de jonction sont sur un hyperboloïde à une nappe ; et si trois droites de jonction sont parallèles à un même plan cet hyperboloïde devient parabolique. Or, dans deux mouvements uniformes rectilignes, les points correspondants sont évidemment en relation homographique, et les droites de jonction sont parallèles au plan qui projette la position initiale de la droite mobile sur le plan parallèle aux deux directrices ; donc cette droite décrit un paraboloïde hyperbolique.

Remarquons, en passant, qu'une droite qui s'appuie constamment sur trois autres comme directrices, décrit un hyperboloïde à une nappe, excepté lorsque les trois directrices sont parallèles à un même plan; on obtient alors un paraboloïde hyperbolique. Lorsque deux points parcourent d'un mouvement uniforme deux droites dans un même plan, les droites de jonction ont pour enveloppe une ellipse, et les droites données sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de cette ellipse.

MM. Laquières (lycée Saint-Louis), Grolons (institution Verdot), Lamacq (institution Massin), Rassicod (lycée Saint-Louis), Robin (aspirant répétiteur au lycée de Brest), ont résolu la question de la même manière.