Nouvelles annales de mathématiques

Propriétés focales des surfaces du deuxième ordre ; d'après Heilermann, de Coblentz

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 242-243
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__242_0>

PROPRIÉTÉS FOCALES DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE;

D'APRÈS HEILERMANN, DE COBLENTZ,

(*Monat. Bericht.* Berlin, avril 1858.)

1. THÉORÈME. *Par un point quelconque d'un ellipsoïde passent deux lignes de courbure et deux plans osculateurs à ces lignes; ces plans coupent le grand axe en deux points* P *et* Q; *prenons sur ce même axe deux points* F *et* F′ *à égale distance du centre, tels, que les quatre points* F, P, Q, F′ *forment une relation* harmonique; *les points* F *et* F′ *sont* fixes, *quel que soit le point de l'ellipsoïde. Nommons ces points* focaux.

2. Si par les points F et F′ et par l'intersection des deux plans osculateurs on mène deux plans, les angles qu'ils forment entre eux sont partagés en parties égales par les plans osculateurs.

3. Les normales à la surface menées par les ombilics coupent le grand axe aux deux points focaux F et F′.

4. Deux sphères qui ont pour rayons ces normales et pour centre F et F′ sont égales et touchent la surface aux ombilics; elles sont les *sphères focales*.

5. Une tangente menée à l'une quelconque de ces sphères par un point de la surface est un *rayon focal*.

6. Un hyperboloïde confocal coupe l'ellipse suivant une ligne de courbure, et *vice versâ* chaque ligne de courbure est l'intersection de l'ellipsoïde avec un hyperboloïde confocal. Le plan polaire d'un foyer pris par rapport à cet hyperboloïde est nommé *plan directeur*. La distance des deux points focaux, divisée par l'axe transverse de l'hy-

perboloïde, est dite l'*excentricité* de la ligne de courbure.

7. Théorème. *Pour un point quelconque d'une ligne de courbure, le rayon focal, mené toujours à la même sphère focale, étant divisé par la distance du point au plan directeur, donne pour quotient l'excentricité de la ligne de courbure.*

8. Théorème. *Pour tous les points d'une ligne de courbure, et selon qu'elle appartient à l'un ou à l'autre système, la somme ou la différence des rayons focaux menés aux deux sphères focales est constante.*

9. Il existe aussi deux foyers sur le petit axe et deux autres imaginaires sur l'axe moyen, et sont doués des mêmes propriétés.

10. En prenant les carrés des trois axes principaux dans les surfaces à centre, le plus grand carré désigne le grand axe, le plus petit carré le petit axe, et le carré moyen le moyen axe; ainsi compris, on a les mêmes propriétés sur toutes les surfaces du deuxième ordre à centre.

Note. Ces importants théorèmes ne sont qu'énoncés; l'auteur publiera les démonstrations; ils sont analogues aux remarquables théorèmes de M. l'abbé Sauze (p. 35 et 36), et que M. Chasles a découverts en 1838 par une autre voie (*Nouvelles Annales*, t. VI, p. 230).