E. LEMOINE

Note sur une conique et son cercle directeur

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 240-241

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__240_1>

NOTE SUR UNE CONIQUE ET SON CERCLE DIRECTEUR;

PAR M. E. LEMOINE,
Élève en Spéciales du Prytanee impérial de la Flèche.

---

1. *Lemme.* Soient A, B, C un triangle inscrit dans un cercle, O le centre et H le point de concours des trois hauteurs. Prolongeons la droite AH jusqu'à ce qu'elle rencontre derechef le cercle au point L; on démontre facilement que le côté BC passe par le milieu de HL.

2. Construisons une conique ayant pour foyers les deux points O et H et pour grand axe le rayon du cercle O qui devient le cercle *directeur* de la conique. Le point L étant sur ce cercle, H étant un foyer et la droite BC étant perpendiculaire à HL et passant par son milieu, il s'ensuit que BC *touche* la conique au point où ce côté est coupé par le rayon OL; par les mêmes raisons, les côtés AB, AC *touchent* la conique; donc cette conique est inscrite dans le triangle ABC; or lorsqu'un triangle et même un polygone quelconque est à la fois inscrit dans une conique et circonscrit à une seconde conique, il

existe une infinité de polygones doués de la même propriété. (Poncelet.)

On a donc le théorème qui suit.

3. Théorème. *Si deux côtés d'un triangle inscrit dans un cercle directeur touchent la conique, le troisième côté la touchera également; un de ces triangles est tel, que le point de concours de ses trois hauteurs coïncide avec le second foyer.*

4. Il y a trois cas.

1°. Le triangle est *acutangle*. Les deux points H et O sont alors dans l'intérieur et la conique est une ellipse qui devient le cercle inscrit lorsque le triangle est équilatéral.

2°. Le triangle est *rectangle*. La conique dégénère en une droite qui va du sommet de l'angle droit au milieu de l'hypoténuse.

3°. Le triangle est *obtusangle*. Les deux points H et O sont hors du triangle et la conique est une hyperbole.

5. Tout point de la conique est également distant du centre du cercle directeur et de la circonférence de ce cercle : propriété qui subsiste aussi dans la parabole où le cercle directeur devient la droite directrice; le triangle ABC se confond avec cette droite, et il n'y a pas lieu au théorème ci-dessus.

Note du Rédacteur. M. Blum a fait voir par une construction mécanique ingénieuse comment les cercles directeurs et les droites directrices peuvent servir à décrire les coniques (t. II, p. 60; 1843) ; de là l'origine du nom. Je crois que le nom de *directrice* paraît pour la première fois dans le *Traité des Coniques* de l'Hôpital. Ne pourrait-on pas, par une construction mécanique et à l'aide des plans *directeurs*, décrire les surfaces du second degré?