LEGRANDAIS

Solution de la question 337 (Jules Vieille)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 229-232

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__229_1>

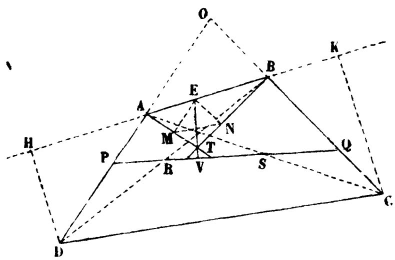
SOLUTION DE LA QUESTION 337 (JULES VIEILLE)

(voir t. XV, p. 290);

PAR M. LEGRANDAIS,
Élève du lycée Louis-le-Grand.

Soit ABCD un quadrilatère quelconque; si par le point de concours T des perpendiculaires élevées de deux sommets consécutifs A et B sur les côtés opposés AD et BC qui y aboutissent, on mène une perpendiculaire TE à la

Fig. 1.



droite RS qui joint les milieux des diagonales, cette perpendiculaire divise le côté AB en deux segments inversement proportionnels aux projections AH, BK des côtés AD et BC sur AB.

Il faut démontrer que

$$\frac{AE}{BE}=\frac{BK}{AH} \quad \text{ou} \quad AE.AH=BE.BK.$$

Du point E j'abaisse EM et EN perpendiculaires sur AT et BT. Les triangles rectangles AHD et AEM sont évidemment semblables et donnent

$$(1) \qquad \frac{AE}{AD}=\frac{EM}{AH}.$$

De même, les triangles semblables ENB, BCK donnent

$$(2) \qquad \frac{BE}{BC}=\frac{EN}{BK}.$$

Divisant membre à membre l'équation (1) par l'équation (2), on a

$$\frac{AE}{BE}\times\frac{BC}{AD}=\frac{BK}{AH}\times\frac{EM}{EN},$$

donc la question revient à démontrer que

$$\frac{BC}{AD}=\frac{EM}{EN}.$$

Je prolonge la ligne RS jusqu'à sa rencontre en P et Q avec AD et BC.

L'angle ETM = OPQ, car ces deux angles ont même supplément ATV.

Mais le quadrilatère EMTN est inscriptible, donc

$$ETM = ENM = OPQ.$$

De plus

$$POQ = MEN,$$

donc les deux triangles EMN, OPQ sont semblables et

$$\frac{EM}{EN}=\frac{OQ}{OP}:$$

ainsi il faut démontrer que

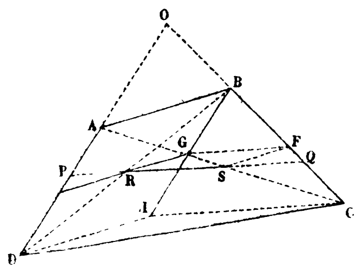
$$\frac{OP}{OQ}=\frac{BC}{AD}.$$

Pour démontrer cette proposition, je mène par le point B, BI égal et parallèle à AD; donc

$$DI = AB.$$

Je dis que la ligne IC est parallèle à PQ.

Fig. 2.



En effet, si par le point R, milieu de BD, et par le point S, milieu de AC, je mène RG et SF parallèles à AB, ces lignes seront égales comme moitiés de AB, et la figure RGFS sera un parallélogramme; mais la ligne GF est parallèle à IC, car elle joint les milieux G et F de BI et de BC. Donc IC est parallèle à RS et les deux triangles OPQ et BIC étant semblables, on a

$$\frac{BC}{BI}=\frac{OQ}{OP} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{AD}=\frac{OQ}{OP}.$$

C. Q. F. D.