NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GERONO

Démonstration d'une proposition relative aux équations transcendantes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 201-204

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__201_0>

DÉMONSTRATION D'UNE PROPOSITION RELATIVE AUX ÉQUATIONS TRANSCENDANTES.

Dans les Traités d'Algèbre on démontre ces deux propositions :

1°. Si deux nombres a, b, substitués à l'inconnue x d'une équation algébrique entière

$$f(x)=0,$$

à coefficients réels, donnent des résultats de signes contraires $f(a)$, $f(b)$, l'équation a au moins une racine réelle comprise entre a et b.

2°. Lorsque deux nombres a, b comprennent entre eux un nombre impair de racines réelles de l'équation algébrique

$$f(x)=0,$$

les résultats $f(a)$, $f(b)$ des substitutions de a et b à x dans $f(x)$ ont des signes contraires, et si le nombre des racines réelles de l'équation

$$f(x)=0$$

comprises entre a et b est pair, $f(a)$ et $f(b)$ ont le même signe.

La démonstration que l'on donne de la première de ces propositions s'applique à une équation transcendante dont le premier membre est une fonction continue pour les valeurs de x comprises entre a et b. Mais, il n'en est pas de même du raisonnement que l'on fait ordinairement pour établir la seconde proposition, il ne convient qu'aux équations algébriques. Et comme on se sert souvent de cette seconde proposition dans la recherche des racines d'une équation transcendante, il nous semble utile de faire voir qu'elle est encore vraie pour des équations de cette nature.

Dans tout ce qui va suivre, il sera supposé que les fonctions transcendantes considérées sont continues, du moins dans l'intervalle des valeurs substituées à la variable. De plus, on admettra les définitions que nous allons faire connaître.

Lorsqu'une racine α d'une équation transcendante

$$f(x) = 0$$

étant substituée à x dans la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ ne réduit pas à zéro cette dérivée, on dit que α est une racine *simple* de l'équation

$$f(x) = 0,$$

ou bien encore que l'équation n'admet qu'une seule racine égale à α.

Mais, lorsque la substitution de α à x annule $f(x)$ et un certain nombre $(n-1)$ de ses dérivées successives $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n-1}(x)$, l'équation

$$f(x) = 0$$

est considérée comme ayant n racines égales à α. Suivant qu'on a

$$n = 2, \quad n = 3, \ldots,$$

la racine α est nommée racine *double*, racine *triple*, etc.

Ces définitions admises, désignons par α, β, δ, γ, etc., les valeurs des racines réelles d'une équation transcendante

$$f(x) = 0,$$

comprises entre deux nombres donnés a, b. Et supposons d'abord que α, 6, δ, γ, etc., représentent des racines *simples*. Nous allons faire voir que $f(a)$, $f(b)$ ont des signes contraires ou le même signe, suivant que le nombre des racines α, 6, δ, γ, etc., est impair ou pair.

Pour plus de précision, nous admettrons qu'on a $a < b$ et que les racines α, 6, δ, γ, etc., soient rangées par ordre de grandeur; ainsi, les nombres a, α, 6, δ, γ,..., b, formeront une suite croissante.

Lorsque x varie depuis a jusqu'à α, la fonction $f(x)$ conserve constamment le même signe, puisque l'équation

$$f(x) = 0$$

n'a aucune racine comprise entre a et α. Il en est de même pour les valeurs de x comprises entre deux des racines consécutives α, 6, δ, γ, etc., et pour les valeurs de x comprises entre la dernière de ces racines et b. Quand x passe par l'une des valeurs α, 6, etc., la fonction $f(x)$ change de signe en passant par zéro. En effet, nommons h une quantité *très-petite* ou susceptible de devenir aussi petite qu'on voudra. Si $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ avaient le même signe, la valeur de $f(\alpha)$ qui est nulle serait nécessairement un *maximum* ou un *minimum* de $f(x)$. Ce serait un maximum si $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ étaient négatifs, et un minimum si le signe commun de ces deux quantités était $+$. Dans ces deux cas, il faudrait, d'après un principe connu, que $f'(\alpha) = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse puisque α est une racine simple de $f(x) = 0$. On voit donc qu'en faisant croître x d'une manière continue depuis a jusqu'à b, la fonction $f(x)$ change de signe autant de fois qu'il y a de racines α, 6, γ, etc., comprises entre a et b. D'où il faut conclure que $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes contraires ou le même signe, suivant que le nombre de ces racines est impair ou pair.

Supposons maintenant que α soit une racine *double* de

$f(x) = 0$, on aura

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0,$$

et le nombre $f''(\alpha)$ ne sera pas nul. Dans ce cas, $f(\alpha)$ est un maximum ou un minimum de $f(x)$. Et, parce que $f(\alpha) = 0$, il faudra que $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ aient le même signe.

Si α est une racine triple, on aura

$$f(\alpha) = 0, \quad f'(\alpha) = 0, \quad f''(\alpha) = 0,$$

et $f'''(\alpha)$ sera différent de zéro; alors $f(\alpha)$ ne peut être ni un maximum ni un minimum de $f(x)$, et, par conséquent, $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ auront des signes contraires, et ainsi de suite; c'est-à-dire que $f(\alpha - h)$ et $f(\alpha + h)$ ont le même signe si le nombre des racines égales à α est pair, et que $f(\alpha - h)$, $f(\alpha + h)$ ont des signes différents quand le nombre des racines égales à α est impair. De là nous concluons que dans tous les cas $f(a)$, $f(b)$ ont des signes contraires, ou le même signe, suivant que le nombre des racines réelles de $f(x) = 0$ comprises entre a et b est impair ou pair, en adoptant dans l'évaluation du nombre des racines comprises entre a et b les définitions que nous avons données.

De cette proposition, on peut immédiatement conclure que :

Si deux nombres a, b, *substitués à* x *dans* f(x), *donnent des résultats de signes contraires*, f(a), f(b), *l'équation*

$$f(x) = 0$$

a un nombre impair de racines réelles comprises entre a *et* b, *et si* f(a) *et* f(b) *ont le même signe*, *les deux nombres* a *et* b *ne comprennent aucune racine de l'équation, ou ils en comprennent un nombre pair.* G.