NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MARIUS LAQUIÈRE
GEORGES FÉNÉON

Solution de la question 425 (Holditsch)

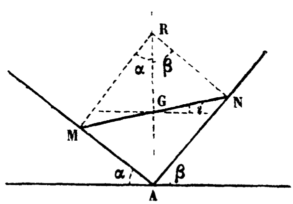
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 17 (1858), p. 195-198
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1858_1_17__195_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 425 (HOLDITSCH)

(voir page 33);

PAR MM. MARIUS LAQUIÈRE ET GEORGES FÉNÉON,
Élèves du lycée Saint-Louis.

Le grand axe d'une ellipse étant dans une position verticale, toute droite homogène pesante passant par le foyer et s'appuyant par ses deux extrémités sur l'ellipse est en équilibre.



Je cherche la condition nécessaire pour que la droite MN homogène et pesante appuyée par ses deux extrémités sur les droites MA, NA inclinées des angles α et β sur l'horizon soit en équilibre.

La droite peut être considérée comme soumise à trois forces : à son poids P appliqué en son milieu G, et aux deux résistances normales des deux plans. Pour l'équilibre, ces forces doivent concourir sur la verticale menée par le milieu de la droite. Cette condition géométrique, qui n'est réalisée que d'une seule manière, caractérise la position d'équilibre (*).

La question est donc ramenée à chercher les conditions auxquelles doit satisfaire la droite appuyée sur l'ellipse pour que les deux normales concourent sur la parallèle au grand axe menée par le milieu de la droite.

Soient

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

l'équation de l'ellipse, et

$$(1)\qquad y = m\,(x - k)$$

celle de la droite, k étant l'abscisse à l'origine que nous déterminerons par la condition d'équilibre.

Les ordonnées des points d'intersection de cette droite avec l'ellipse seront les racines de l'équation

$$(2)\qquad \left(a^2 + \frac{b^2}{m^2}\right) y^2 + \frac{2\,b^2 k}{m}\, y - b^2 (a^2 - k^2) = 0;$$

(*) C'est du reste le résultat que donne le calcul.

Appelant i l'angle d'inclinaison de la droite MN sur l'horizon et appliquant les équations d'équilibre, on arrive à la condition

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin\beta \sin\alpha},$$

qui est toujours remplie lorsque les normales aux deux plans en M et N concourent sur la verticale du milieu G de la droite. En effet, soient $2l$ la longueur de la droite et m la distance du point G au point de concours R des normales; la droite GR étant verticale, on a, dans les triangles MRG, NRG,

$$\frac{\sin\beta}{\cos(\beta - i)} = \frac{l}{n} = \frac{\sin\alpha}{\cos(\alpha + i)},$$

ou

$$\sin\beta\,(\cos\alpha \cos i - \sin\alpha \sin i) = \sin\alpha\,(\cos\beta \cos i - \sin\beta \sin i),$$

ou

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{2 \sin\beta \sin\alpha}.$$

l'équation de la normale au point M (x', y'),

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'}(x - x'),$$

d'où

$$x = \frac{c^2}{a^2} x' + \frac{b^2 x'}{a^2 y'} y.$$

L'équation

$$\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x'}{y'} - \frac{x''}{y''}\right) y_1 + \frac{c^2}{a^2}(x' - x'') = 0$$

donnera l'ordonnée y_1 du point d'intersection des deux normales en M et N (x'', y'').

Résolvant,

$$y_1 = \frac{c^2}{b^2} \frac{(x'' - x')\, y' y''}{x' y'' - y' x''};$$

mais les coordonnées x', y', x'', y'' satisfaisant à l'équation (1), on a

$$x' = \frac{mk + y'}{m}, \quad x'' = \frac{mk + y''}{m},$$

d'où, substituant,

$$y_1 = \frac{c^2}{b^2} \times \frac{y' y''}{mk}.$$

L'équation (2) nous donne

$$y' y'' = -\frac{b^2 (a^2 - k^2) m^2}{a^2 m^2 + b^2},$$

$$\frac{y' + y''}{2} = -\frac{b^2 km}{a^2 m^2 + b^2},$$

et, d'après ce que nous avons dit pour qu'il y ait équilibre, il faut que

$$y_1 = \frac{y' + y''}{2},$$

donc

$$y_1 = -\frac{c^2 (a^2 - k^2) m}{k (a^2 m^2 + b^2)} = -\frac{b^2 km}{a^2 m^2 + b^2}$$

ou

$$c^2(a^2 - k^2) = b^2 k^2,$$

d'où

$$k = \pm c.$$

La droite doit donc passer par le foyer; du reste il est évident que c'est par le foyer inférieur.

Nos calculs supposent que m est fini et différent de zéro. Si ce coefficient angulaire était nul, la droite serait verticale, se confondrait avec l'axe, car k ne peut être infini; la droite passera encore par le foyer. Dans le cas où m serait infini, la droite alors horizontale est toujours en équilibre, car la condition géométrique est toujours satisfaite, les deux normales se coupent sur l'axe; de plus les forces sont égales aux deux extrémités de la droite.

Ce cas est le seul dans lequel une droite ne passant pas par le foyer puisse être en équilibre, et toute droite passant par le foyer est en équilibre.

Note du Rédacteur. Soient a et b les distances de M et N à la directrice; c, d les distances des mêmes points au foyer; la distance du centre de gravité de la corde MN à la directrice est $\frac{a+b}{2}$, ou, d'après la propriété du foyer, $\frac{m(c+d)}{2}$ où m est constant, et l'on a

$$c + d < \mathrm{MN}.$$

Mais, dans le cas d'équilibre, on sait que la distance du centre de gravité doit être un minimum, ce qui a lieu lorsque $c + d = \mathrm{MN}$, c'est-à-dire lorsque la corde passe par le foyer.